Prefață,

Lucrarea de față este scrisă cu scopul de a oferi suport pentru seminarizarea cursurilor de logică şi teoria mulțimilor ce se predau în principal la facultățile de matematică şi informatică; ea este structurată pe 6 paragrafe şi conține un număr de 263 probleme.

În paragrafele 1 şi 2 sunt selectate probleme legate de teoria mulțimilor, funcțiilor şi numerelor cardinale (mulțimile fiind privite din punctul de vedere al teoriei naive a lui Cantor).

Paragraful 3 conține probleme legate de mulțimi ordonate, iar paragrafele 4 şi 5 probleme legate de latici şi algebre Boole.

Astfel, paragrafele 1-5 oferă suportul matematic pentru ultimele două paragrafe ce conțin probleme legate de calculul clasic al propozițiilor şi predicatelor (după ce la începutul fiecăruia prezentăm anumite aspecte teoretice).

Lucrarea se adresează în primul rând studenților de la facultățile de matematică şi informatică, însă ea poate fi utilizată şi de studenții politehnişti ca şi de profesorii de matematică şi elevii din învățământul preuniversitar.

După ştiința noastră, sunt puține lucrări cu acest specific în literatura de specialitate de la noi din țară, aşa că orice sugestie pentru îmbunătățirea acesteia va fi bine venită.

Craiova, 03.03. 03 Autorii

Index de notații şi abrevieri

a.î.	: astfel încât
PIF	: proprietatea intersecției finite
m.p.	: modus ponens
t.d.	: teorema deducției
c.m.m.m.c.	: cel mai mic multiplu comun
c.m.m.d.c.	: cel mai mare divizor comun
$\Rightarrow(\Leftrightarrow)$	: implică (echivalent)
$(\forall)$ $((\exists))$	: cuantificatorul universal (existențial)
$x\in A$	: elementul x aparține mulțimii A
$A\subseteq B$	: mulțimea A este inclusă în mulțimea B
$A\subsetneq B$	: mulțimea A este inclusă strict în mulțimea B
$A\cap B$	: intersecția mulțimilor A şi B
$A\cup B$	: reuniunea mulțimilor A şi B
$A \setminus B$	: diferența mulțimilor A şi B
$A\Delta B$	: diferența simetrică a mulțimilor A şi B
$P(M)$	: familia submulțimilor mulțimii M
$C_M A$	: complementara în raport cu M a mulțimii A
$A\times B$	: produsul cartezian al mulțimilor A şi B
$[x]_\rho$	: clasa de echivalență a elementului x modulo relația de echivalență ρ
Echiv(A)	: mulțimea relațiilor de echivalență de pe A
A/ρ	: mulțimea factor a mulțimii A prin relația de echivalență ρ
φ_A	: funcția caracteristică a mulțimii A
M^N	: $\{f : N \to M\}$
$A \sim B$	: mulțimile A şi B sunt cardinal echivalente
$\|M\|$	: cardinalul mulțimii M (dacă M este finită $\|M\|$ reprezintă numărul elementelor lui M)
1_A	: funcția identică a mulțimii A

$\mathbb{N}(\mathbb{N}^*)$	: mulțimea numerelor naturale (nenule)
$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}^*)$	: mulțimea numerelor întregi (nenule)
$n\mathbb{Z}$	: $\{nk : k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{Q}(\mathbb{Q}^*)$	: mulțimea numerelor raționale (nenule)
$\mathbb{Q}_+^*$	: mulțimea numerelor raționale strict pozitive
$\mathbb{R}(\mathbb{R}^*)$	: mulțimea numerelor reale (nenule)
$\mathbb{R}_+^*$	: mulțimea numerelor reale strict pozitive
I	: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (mulțimea numerelor iraționale)
$\mathbb{C}(\mathbb{C}^*)$	: mulțimea numerelor complexe (nenule)
$\lvert z \rvert$	: modulul numărului complex z
$m \mid n$	: numărul întreg m divide numărul întreg n
$[m,n]$	: cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale m şi n
(m,n)	: cel mai mare divizor comun al numerelor naturale m şi n
$\aleph_0$	: cardinalul mulțimii numerelor naturale $\mathbb{N}$
c	: cardinalul mulțimii numerelor reale $\mathbb{R}$
0	: cel mai mic element dintr-o mulțime ordonată
1	: cel mai mare element dintr-o mulțime ordonată
2 sau L_2	: algebra Boole $\{0,1\}$
$a \wedge b$	: inf $\{a,b\}$
$a \vee b$	: sup $\{a,b\}$
$a \to b$	: pseudocomplementul lui a relativ la b
a^*	: pseudocomplementul lui a
a'	: complementul lui a
F(L)	: mulțimea filtrelor laticei L
I(L)	: mulțimea idealor laticei L
$\vdash \varphi$	: φ este o teoremă formală
$f \vDash \varphi$	: φ este adevărată în realizarea f
Taut	: mulțimea tautologiilor
Prov	: mulțimea formulelor demonstrabile

Cuprins

A: ENUNȚURI

§1. Mulțimi, funcții, relații binare.

1.1. Fie a, b, $c \in \mathbb{Z}$ numere impare. Să se arate că :

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid ax^2+bx+c=0\}=\emptyset.$$

1.2. Să se arate că nu există un număr finit de numere raționale $r_1,\ldots,r_n$ a.î. orice număr $x \in \mathbb{Q}$ să se scrie sub forma $x=x_1r_1+\ldots+x_nr_n$ cu $x_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i \le n$.

1.3. Fie a, b $\in \mathbb{R}$, a < b. Să se arate că :

$$[a, b] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \text{ şi } [a, b] \cap \mathbf{I} \neq \emptyset.$$

1.4. Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ a.î. rădăcinile ecuației $kx^2+(2k-1)x+k-2=0$ să fie raționale.

1.5. Dacă a, b, c, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$, (a, b, c $\geq$ 0) atunci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ $\in \mathbb{Q}$. Generalizare.

1.6. Să se arate că $\sqrt[3]{2} \notin \{ p+q\sqrt{r} \mid p,q,r \in \mathbb{Q},\ r \geq 0\}$.

1.7. Să se determine mulțimea:

$$\{a \in \mathbb{Q} \mid \text{există } b \in \mathbb{Q} \text{ a.î. } 5a^2-3a+16 = b^2\}.$$

1.8. Dacă a, b, $c \in \mathbb{Q}$ iar $p \in \mathbb{N}$ este un număr prim a.î. $a+b\sqrt[3]{p}+c\sqrt[3]{p^2} = 0$, atunci a = b = c = 0.

1.9. Să se demonstreze că dacă a_1, …, a_n sunt numere naturale două câte două diferite, nici unul dintre ele nefiind pătratul unui număr întreg mai mare decât 1, şi $b_1,\dots,b_n$ numere întregi nenule, atunci $b_1\sqrt{a_1}+b_2\sqrt{a_2}+\dots+b_n\sqrt{a_n}\neq 0$.

1.10. Dacă m, n $\in\mathbb{N}^*$ şi $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$, atunci $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>\frac{1}{mn}$.

1.11. Să se arate că există a, b $\in$**I** a.î. $a^b\in\mathbb{N}$.

1.12. Fie $a\in\mathbb{R}^*$, a.î. $a+\frac{1}{a}\in\mathbb{Z}$. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{Z}$, $a^n+\frac{1}{a^n}\in\mathbb{Z}$.

1.13. Dacă $\alpha\in\mathbb{R}$ a.î. cos $\pi\alpha=\frac{1}{3}$, atunci $\alpha\in$**I**.

1.14. Dacă a, b$\in\mathbb{N}^*$, a.î. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\in\mathbb{N}$, atunci a=b.

1.15. Să se arate că $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\in$**I**.

1.16. Fie z, $z'\in\mathbb{C}$ a.î. $1+zz'\neq 0$ şi $|z|=|z'|=1$.
Să se arate că $\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}$.

1.17. Fie $z_1, \dots, z_n\in\mathbb{C}$ a.î. $|z_1|=\dots=|z_n|=r\neq 0$.
Să se demonstreze că $\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\dots(z_n+z_1)}{z_1z_2\dots z_n}\in\mathbb{R}$.

1.18. Fie $M\subseteq\mathbb{C}$ a.î. $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}\subseteq M$ şi pentru orice $z_1, z_2\in M\Rightarrow z_1+z_2\in M$. Să se demonstreze că $M=\mathbb{C}$.

1.19. Fie $f: A\to B$ o funcţie iar $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$ două familii de submulţimi ale lui A şi respectiv B.

Să se demonstreze că:

(i) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;

(ii) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$;

(iii) $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(iv) $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

1.20. Fie M o mulțime finită iar $M_1, M_2, ..., M_n$ submulțimi ale lui M. Să se demonstreze că :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{1\le i\le n}|M_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|M_i \cap M_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|M_i \cap M_j \cap M_k| -$$

$$- .... + (-1)^{n-1}|M_1 \cap ... \cap M_n|.$$

Observație. Egalitatea de mai sus poartă numele de *principiul includerii şi excluderii.*

1.21. Fie M şi N două mulțimi având m, respectiv n elemente. Să se demonstreze că :

(i) Numărul funcțiilor definite pe M cu valori în N este egal cu n^m;

(ii) Dacă m = n, atunci numărul funcțiilor bijective de la M la N este egal cu m! ;

(iii) Dacă $m \le n$, atunci numărul funcțiilor injective de la M la N este egal cu A_n^m;

(iv) Dacă $m \geq n$, atunci numărul funcțiilor surjective de la M la N este egal cu :

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.$$

1.22. Fie M şi N două mulțimi iar $f : M \to N$ o funcție. Între mulțimile P(M) şi P(N) se definesc funcțiile $f_* : P(M) \to P(N)$, $f^* : P(N) \to P(M)$ prin $f_*(A) = f(A)$, $A \in P(M)$ şi $f^*(B) = f^{-1}(B)$, $B \in P(N)$.

Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este injectivă;

(ii) f_* este injectivă;

(iii) $f^* \circ f_* = 1_{P(M)}$;

(iv) f^* este surjectivă;

(v) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, pentru orice $A, B \in P(M)$;

(vi) $f(\complement_M A) \subseteq \complement_N f(A)$, pentru orice $A \in P(M)$;

(vii) Dacă $g, h : L \to M$ sunt două funcții a.î. $f \circ g = f \circ h$, atunci $g = h$;

(viii) Există o funcție $g : N \to M$ a.î. $g \circ f = 1_M$.

1.23. Cu notațiile de la problema **1.22.**, să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este surjectivă ;

(ii) f_* este surjectivă ;

(iii) $f_* \circ f^* = 1_{P(N)}$;

(iv) f^* este injectivă ;

(v) $f(\complement_M A) \supseteq \complement_N f(A)$, pentru orice $A \in P(M)$;

(vi) Dacă g, h:N→P sunt două funcții a.î. $g\circ f = h\circ f$, atunci $g = h$;

(vii) Există o funcție $g:N\to M$ a.î. $f\circ g = 1_N$.

1.24. Cu notațiile de la problema 1.22., să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este bijectivă;

(ii) $f(\complement_M A) = \complement_N f(A)$, pentru orice $A\in P(M)$;

(iii) f_* este bijectivă;

(iv) Există o funcție $g : N \to M$ a.î. $f\circ g = 1_N$ şi $g\circ f = 1_M$.

1.25. Fie M o mulțime finită şi $f : M \to M$ o funcție. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este injectivă;

(ii) f este surjectivă;

(iii) f este bijectivă .

1.26. Fie A o mulțime. Să se demonstreze că :

(i) A este finită ⇔ orice injecție $f : A\to A$ este şi surjecție;

(ii) A este finită ⇔ orice surjecție $f :A\to A$ este şi injecție.

1.27. Fie M o mulțime finită iar $f : M\to M$ o funcție a.î. $f\circ f = 1_M$. Să se demonstreze că dacă M are număr impar de elemente, atunci există $x\in M$ a.î. $f(x) = x$.

1.28. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ a.î. $f(n+1) > f(f(n))$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. Să se demonstreze că $f = 1_{\mathbb{N}}$.

1.29. Fie şirul de funcții:

$$\longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \ldots \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 .$$

Să se demonstreze că dacă mulțimile A_i sunt finite, pentru orice $i=1, 2, \ldots, n, \ldots$, atunci există un şir de elemente $(x_n)_{n\geq 0}$, unde $x_n \in A_n$, pentru orice $n\geq 0$, cu proprietatea că $f_n(x_n) = x_{n-1}$, oricare ar fi $n\geq 1$.

1.30. Fie M o mulțime cu n elemente. Considerăm ecuațiile:

(1) $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = M$,

(2) $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k = \emptyset$,

unde $k\geq 1$ este un număr natural, iar $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sunt submulțimi ale lui M.

Să se demonstreze că ecuațiile (1) şi (2) au acelaşi număr de soluții şi anume $(2^k-1)^n$.

1.31. Fie M, N, P mulțimi iar $f : M\to N$ şi $g : N\to P$ două funcții.

Să se demonstreze că :

(i) Dacă $g\circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă. Ce condiție suplimentară trebuie impusă lui f pentru a rezulta şi injectivitatea lui g ?

(ii) Dacă $g\circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă. Ce condiție suplimentară trebuie impusă lui g pentru a rezulta şi surjectivitatea lui f ?

1.32. Fie M, N, P mulțimi iar $f : M\to N$, $g : N\to P$, $h : P\to M$ trei funcții. Se consideră funcțiile compuse $h\circ g\circ f$, $g\circ f\circ h$, $f\circ h\circ g$.

Să se demonstreze că :

(i) Dacă două dintre aceste funcții compuse sunt injective iar cea de a treia este surjectivă, atunci f, g, h sunt bijective;

(ii) Dacă două dintre aceste funcții compuse sunt surjective iar cea de a treia este injectivă, atunci f, g, h sunt bijective.

1.33. Fie M, N, P, Q patru mulțimi iar f, g, u, v patru funcții a.î. diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[r, "v"] & Q \end{tikzcd}$$

este comutativă (adică $g \circ u = v \circ f$). Să se demonstreze că dacă u este surjectivă iar v este injectivă, atunci există o unică funcție $h : N \rightarrow P$ a.î. $h \circ u = f$ şi $v \circ h = g$.

1. 34. Fie M o mulțime iar $f : M \rightarrow M$ o funcție. Se consideră funcția $f^n : M \rightarrow M$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\ ori}$, $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$.

(i) Să se compare cu ajutorul relației de incluziune, mulțimile $M_n = f^n(M)$; să se studieze cazul special când f este injectivă, fără a fi însă surjectivă;

(ii) În cazul în care f este injectivă, fără a fi însă surjectivă, să se arate că există o infinitate de funcții distincte $g: M \rightarrow M$ a.î. $g \circ f = 1_M$;

(iii) În cazul în care f este surjectivă, fără a fi însă injectivă, să se arate că există cel puțin două funcții distincte $g, g' : M \rightarrow M$ a.î. $f \circ g = f \circ g' = 1_M$.

1.35. Fie M o mulțime iar A, B$\in$P(M); se consideră funcția f : P(M)$\rightarrow$P(A)$\times$P(B) definită prin f(X) = (X$\cap$A, X$\cap$B), X$\in$P(M).

Să se demonstreze că:

(i) f este injectivă $\Leftrightarrow$ A$\cup$B = M;

(ii) f este surjectivă $\Leftrightarrow$ A$\cap$B = $\emptyset$;

(iii) f este bijectivă $\Leftrightarrow$ A = C_MB ; în acest caz să se descrie inversa lui f.

1.36. Să se demonstreze ca funcția f: $\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{N}^*$, definită prin:

$$f(n)=\begin{cases}1, & pentru\ \ n=0\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{|n|}{2n}(4n-1), & pentru\ \ n\neq 0\end{cases}$$

este bijectivă şi să se determine inversa ei.

1.37. Să se demonstreze că funcția f : $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\rightarrow\mathbb{N}^*$, definită prin:

$$f(x,y)=\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}+x$$

pentru orice x, y$\in\mathbb{N}^*$, este bijectivă.

1.38. Fie f : M $\rightarrow$ N o funcție iar φ : P(M) $\rightarrow$ P(M), φ(A) = f^{-1}(f(A)), A$\in$P(M).

Să se arate că:

(i) $\varphi\circ\varphi = \varphi$;

(ii) f este injectivă $\Leftrightarrow$ $\varphi = 1_{P(M)}$.

1.39. Fie $f : M \to N$ o funcţie iar $\psi : P(N) \to P(N)$, $\psi(B) = f(f^{-1}(B))$, $B \in P(N)$.

Să se arate că:

(i) $\psi \circ \psi = \psi$;

(ii) f este surjectivă $\Leftrightarrow$ $\psi = 1_{P(N)}$.

1.40. Pentru o mulţime nevidă M şi $A \in P(M)$, definim $\varphi_A : M \to \{0,1\}$,

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \textit{dacă } x \notin A \\ 1, & \textit{dacă } x \in A \end{cases}$$

pentru orice $x \in M$. Să se demonstreze că dacă $A, B \in P(M)$, atunci:

(i) $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$;

(ii) $\varphi_\varnothing = 0$, $\varphi_M = 1$;

(iii) $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A \varphi_B$, $\varphi_A^2 = \varphi_A$;

(iv) $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B$;

(v) $\varphi_{A\setminus B} = \varphi_A - \varphi_A \varphi_B$, $\varphi_{C_M A} = 1 - \varphi_A$;

(vi) $\varphi_{A \Delta B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\varphi_A\varphi_B$.

Observaţie. Funcţia φ_A poartă numele de *funcţia caracteristică* a mulţimii A.

1.41. Fie M o mulţime oarecare iar a, b două numere reale distincte. Pentru $A \in P(M)$ definim $\psi_A : M \to \{a,b\}$,

$$\psi_A(x) = \begin{cases} a, & \textit{dacă } x \in A \\ b, & \textit{dacă } x \notin A \end{cases}, \text{ pentru orice } x \in M.$$

Să se demonstreze că dacă oricare ar fi A, B∈P(M), avem $\psi_{A\cap B} = \psi_A \psi_B$, atunci a = 1 şi b = 0.

1.42. Utilizând eventual proprietăţile funcţiei caracteristice, să se demonstreze că dacă M este o mulţime oarecare iar A, B, C∈P(M), atunci:

(i) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$;

(ii) $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$;

(iii) $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$.

1.43. Fie funcţiile f, g, h:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ având proprietăţile că g şi h sunt bijective iar f = g-h.

Să se demonstreze că f(n) = 0, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

1.44. Fie ρ o relaţie binară pe mulţimea A.

Notăm $\overline{\rho} = \Delta_A\cup\rho\cup\rho^{-1}$.

Să se demonstreze că :

(i) $\rho\subseteq\overline{\rho}$;

(ii) $\overline{\rho}$ este reflexivă şi simetrică;

(iii) dacă ρ′ este o altă relaţie binară pe A reflexivă şi simetrică a.î. $\rho\subseteq\rho'$, atunci $\overline{\rho}\subseteq\rho'$.

1.45. Fie ρ o relaţie binară pe mulţimea A care este reflexivă şi simetrică iar $\overline{\rho} = \bigcup\limits_{n\geq 1}\rho^n$.

Să se demonstreze că :

(i) $\rho\subseteq\overline{\rho}$;

(ii) $\overline{\rho}$ este o echivalenţă pe A;

(iii) Dacă ρ′ este o altă relaţie de echivalenţă pe A a.î. $\rho\subseteq\rho'$, atunci $\overline{\rho}\subseteq\rho'$.

1.46. Fie ρ o relație binară pe mulțimea A iar $\overline{\rho} = \bigcup_{n\geq 1}(\rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_A)^n$.

Să se demonstreze că :

(i) $\rho \subseteq \overline{\rho}$;

(ii) $\overline{\rho}$ este relație de echivalență;

(iii) dacă ρ' este o altă relație de echivalență pe A a.î. $\rho \subseteq \rho'$, atunci $\overline{\rho} \subseteq \rho'$.

Observație. Vom spune că $\overline{\rho}$ este *relația de echivalență generată de ρ*.

1.47. Fie ρ, ρ′ două relații binare pe mulțimea A.

Să se demonstreze că:

(i) $(\rho \cup \rho')^2 = \rho^2 \cup \rho'^2 \cup (\rho \circ \rho') \cup (\rho' \circ \rho)$ (unde $\rho^2 = \rho \circ \rho$);

(ii) Dacă ρ, ρ′ sunt relații de echivalență, atunci $\rho \cup \rho'$ este o nouă relație de echivalență dacă şi numai dacă $\rho \circ \rho'$, $\rho' \circ \rho \subseteq \rho \cup \rho'$.

1.48. Fie $\mathcal{F}$ o familie nevidă de relații de echivalență pe mulțimea A având proprietatea că dacă $\rho, \rho' \in \mathcal{F}$, atunci $\rho \subseteq \rho'$ sau $\rho' \subseteq \rho$.

Să se demonstreze că $\bigcup_{\rho \in F} \rho$ este relație de echivalență.

1.49. Fie A o mulțime şi ρ o relație binară pe A având proprietățile:

(i) pentru orice $x \in A$, există $y \in A$ a.î. $(y, x) \in \rho$;

(ii) $\rho \circ \rho^{-1} \circ \rho = \rho$;

Să se demonstreze că în aceste condiții $\rho \circ \rho^{-1}$ şi $\rho^{-1} \circ \rho$ sunt relații de echivalență pe A.

1.50. Fie ρ_1, ρ_2 relații de echivalență pe mulțimea A.

Să se demonstreze că:

(i) $\rho_1 \circ \rho_2$ este relație de echivalență dacă și numai dacă $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$;

(ii) În cazul (i), $\rho_1 \circ \rho_2 = \bigcap\limits_{\substack{\rho' \in Echiv(A) \\ \rho_1, \rho_2 \subseteq \rho'}} \rho'$.

1.51. Fie M și N două mulțimi pe care s-au definit relațiile de echivalență ρ, respectiv ρ' și $f : M \to N$ o funcție având proprietatea:

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \rho' \ (x, y \in M).$$

Să se demonstreze că există o singură funcție $\bar{f} : M/\rho \to N/\rho'$ a. î. diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{M,\rho}"'] & N \arrow[d, "p_{N,\rho'}"] \\ M/\rho \arrow[r, "\bar{f}"'] & N/\rho' \end{tikzcd}$$

este comutativă (adică $p_{N,\rho'} \circ f = \bar{f} \circ p_{M,\rho}$, unde $p_{M,\rho}$, $p_{N,\rho'}$ sunt surjecțiile canonice).

1.52. Fie M și N două mulțimi iar $f : M \to N$ o funcție; notăm prin ρ_f relația binară de pe M definită astfel:

$$(x, y) \in \rho_f \Leftrightarrow f(x) = f(y) \ (x, y \in M).$$

Să se demonstreze că:

(i) ρ_f este relație de echivalență pe M;

(ii) Există o unică funcție bijectivă $\bar{f} : M/\rho_f \to Im(f)$ a.î. $i \circ \bar{f} \circ p_{M,\rho_f} = f$, $i : Im(f) \to N$ fiind incluziunea.

1.53. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim relația:

$$(x, y)\in\rho \Leftrightarrow x\text{-}y\in\mathbb{Z} \quad (x, y\in\mathbb{R}).$$

Să se demonstreze că ρ este relație de echivalență şi că există o bijecție între $\mathbb{R}/\rho$ şi intervalul de numere reale [0, 1).

1.54. Fie M o mulțime iar $N\subseteq M$. Pe mulțimea P(M) definim relația:

$$(X, Y)\in\rho \Leftrightarrow X\cap N = Y\cap N.$$

Să se demonstreze că ρ este relație de echivalență şi că există o bijecție între P(M)/ρ şi P(N).

1.55. Fie M o mulțime nevidă. Să se demonstreze că funcția care asociază unei relații de echivalență definite pe M partiția lui M dată de echivalența respectivă este bijectivă.

1.56. Fie M o mulțime finită cu m elemente. Să se demonstreze că numărul $N_{m,\,k}$ al relațiilor de echivalență ce pot fi definite pe M a.î. mulțimea cât să aibă k elemente ($k\leq m$) este dat de formula:

$$N_{m,k} = (1/k!)\cdot\left[k^m - C_k^1(k-1)^m + C_k^2(k-2)^m - ... + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}\right],$$

deci numărul relațiilor de echivalență ce pot fi definite pe mulțimea M este dat de formula $N=N_{m,\,1}+N_{m,\,2}+...+N_{m,\,m}$.

1.57. Fie $(M_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi. Notăm $P=\{\varphi:I\to \bigcup\limits_{i\in I} M_i \mid$ pentru orice $j\in I \Rightarrow \varphi(j)\in M_j\}$ iar pentru orice $j\in I$, considerăm $p_j:P\to M_j$, $p_j(\varphi) = \varphi(j)$, $\varphi\in P$.

Să se demonstreze că oricare ar fi mulțimea N şi familia de funcții $(f_i:N\to M_i)_{i\in I}$, există o unică funcție $f:N\to P$ a.î. $p_i\circ f = f_i$, pentru orice $i\in I$.

Observație. Dubletul (P, $(p_i)_{i\in I}$) se notează prin $\prod_{i\in I} M_i$ şi poartă numele de *produsul direct* al familiei de mulțimi $(M_i)_{i\in I}$ iar funcțiile $(p_i)_{i\in I}$ poartă numele de *proiecțiile canonice*.

1.58. Fie $(M_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi. Pentru fiecare $i\in I$ notăm $\overline{M_i} = M_i \times \{i\}$ iar $S=\bigcup_{i\in I} \overline{M}_i$. Definim pentru fiecare $j\in I$, $\alpha_j:M_j\to S$, $\alpha_j(x) = (x, j)$, $x\in M_j$.

Să se demonstreze că oricare ar fi mulțimea N şi familia de funcții $(f_i:M_i\to N)_{i\in I}$, există o unică funcție $f:S\to N$ a.î. $f\circ\alpha_i = f_i$, pentru orice $i\in I$.

Observație. Dubletul (S, $(\alpha_i)_{i\in I}$) se notează prin $\coprod_{i\in I} M_i$ şi poartă numele de *suma directă* a familiei de mulțimi $(M_i)_{i\in I}$ iar funcțiile $(\alpha_i)_{i\in I}$ poartă numele de *injecțiile canonice*.

1.59. Fie f, g : $M\to N$ două funcții. Dacă notăm prin $A = \{x\in M : f(x) = g(x)\}$ iar prin $i : A\to M$ incluziunea canonică, să se demonstreze că dubletul (A, i) are următoarele proprietăți:

(i) $f\circ i = g\circ i$;

(ii) Pentru orice mulțime P şi funcție $h:P\to M$ a.î. $f\circ h = g\circ h$, există o unică funcție $u : P\to A$ a. î. $i\circ u = h$.

Observație. Dubletul (A, i) se notează prin Ker(f, g) şi poartă numele de *nucleul* perechii (f, g).

1.60. Fie f, g : $M \to N$ două funcții iar $\rho \subseteq N \times N$, $\rho=\{(f(x), g(x)) : x\in M\}$. Dacă notăm prin $\overline{\rho}$ relația de echivalență generată de ρ (conform problemei **1.46.**) să se demonstreze că dubletul ($N/\overline{\rho}$, $p_{N,\overline{\rho}}$) are următoarele proprietăți :

(i) $p_{N,\overline{\rho}} \circ f = p_{N,\overline{\rho}} \circ g$;

(ii) Pentru orice mulțime P şi funcție $h : N \to P$ a. î. $h\circ f = h\circ g$, există o unică funcție $u : N/\overline{\rho} \to P$ a.î. $u\circ p_{N,\overline{\rho}} = h$.

Observație. Dubletul $(N/\overline{\rho}, p_{N,\overline{\rho}})$ se notează prin Coker(f, g) şi poartă numele de *conucleul* perechii (f, g).

1.61. Considerăm diagrama de mulțimi şi funcții:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "f"] & \\
& P \\
N \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

şi notăm $Q = \{(x, y)\in M\times N \mid f(x) = g(y)\}$ iar prin π_1, π_2 restricțiile proiecțiilor canonice ale lui $M\times N$ pe M, respectiv N, la Q. Să se demonstreze că tripletul (Q, π_1, π_2) are următoarele proprietăți:

(i) $f\circ \pi_1 = g\circ \pi_2$;

(ii) Pentru oricare alt triplet cu (R, α, β), cu R mulțime iar $\alpha:R\to M$, $\beta:R\to N$ funcții a.î. $f\circ\alpha = g\circ\beta$, există o unică funcție $\gamma:R\to Q$ a.î. $\pi_1\circ\gamma = \alpha$ şi $\pi_2\circ\gamma = \beta$.

Observație. Tripletul (Q, π_1, π_2) se notează $M\prod_P N$ şi poartă numele de *produsul fibrat* al lui M cu N peste P.

1.62. Considerăm diagrama de mulțimi şi funcții:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dr, "\alpha_M"] & \\
P \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & M\coprod N=T \\
& N \arrow[ur, "\alpha_N"'] &
\end{tikzcd}$$

α_M, α_N fiind injecțiile canonice ale sumei directe (vezi problema **1.58.**).

Pe mulțimea T considerăm relația binară $\rho = \{(h_1(x), h_2(x)),\ x \in P\}$, unde $h_1 = \alpha_M \circ f$ iar $h_2 = \alpha_N \circ g$; fie $\overline{\rho}$ relația de echivalență generată de ρ (conform problemei **1.46.**), iar $i_M = p_{T,\overline{\rho}} \circ \alpha_M$, $i_N = p_{T,\overline{\rho}} \circ \alpha_N$. Să se demonstreze că tripletul $(T/\overline{\rho}, i_M, i_N)$ are următoarele proprietăți:

(i) $i_M \circ f = i_N \circ g$;

(ii) Pentru oricare alt triplet cu (R, α, β), cu R mulțime iar $\alpha:M \to R$, $\beta:N \to R$ funcții a.î. $\alpha \circ f = \beta \circ g$, există o unică funcție $\gamma : T/\overline{\rho} \to R$ a.î. $\gamma \circ i_M = \alpha$ şi $\gamma \circ i_N = \beta$.

Observație. Tripletul $(T/\overline{\rho}, i_M, i_N)$ se notează prin $M \amalg_P N$ şi poartă numele de *suma fibrată* a lui M cu N peste P.

§2. Numere cardinale.

2.1. (*Cantor*). Să se arate că pentru orice mulţime A, $A \nsim P(A)$.

2.2. (*Cantor, Bernstein*). Fie A_0, A_1, A_2 trei mulţimi a.î. $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0$. Să se arate că dacă $A_0 \sim A_2$, atunci $A_0 \sim A_1$.

2.3. Fie A, B, A′, B′ mulţimi a.î. $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ şi $A \sim B'$ iar $B \sim A'$. Atunci $A \sim B$.

2.4. Fie $f: A \to B$ o funcţie. Să se arate că:

(i) dacă f este injecţie, atunci $|A| \le |B|$;

(ii) dacă f este surjecţie, atunci $|B| \le |A|$.

2.5. Fie m, n, p numere cardinale . Să se arate că:

(i) $m \le m$;

(ii) $m \nless m$;

(iii) $m \le n$ şi $n \le m \Rightarrow m = n$;

(iv) $m \le n$ şi $n \le p \Rightarrow m \le p$;

(v) $m < n$ şi $n < p \Rightarrow m < p$;

(vi) $m \le n \Rightarrow m + p \le n + p$;

(vii) $m \le n \Rightarrow mp \le np$;

(viii) $m \le n \Rightarrow m^p \le n^p$;

(ix) $m \le n \Rightarrow p^m \le p^n$.

2.6. Dacă m, n, p, q sunt patru numere cardinale a.î. $p \le q$ şi $1 \le m \le n$, atunci $p^m \le q^n$.

2.7. Dacă m, n, p sunt trei numere cardinale, atunci are loc egalitatea:

$$(m^n)^p = m^{np}.$$

2.8. Fie $(m_\alpha)_{\alpha\in I}$ şi $(n_\alpha)_{\alpha\in I}$ două familii de numere cardinale indexate după aceeaşi mulţime. Dacă $m_\alpha \le n_\alpha$, oricare ar fi $\alpha\in I$, atunci:

$$\sum_{\alpha\in I} m_\alpha \le \sum_{\alpha\in I} n_\alpha \text{ şi } \prod_{\alpha\in I} m_\alpha \le \prod_{\alpha\in I} n_\alpha.$$

2.9. Vom spune despre o mulţime M că este *infinită :*

(i) *în sens Dedekind*, dacă există $M'\subset M$ a.î. $M'\sim M$;

(ii) *în sens Cantor,* dacă conţine o submulţime numărabilă;

(iii) *în sens obişnuit,* dacă $M \nsim S_n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ (unde $S_n=\{1, 2, ..., n\}$) .

Să se demonstreze că cele trei definiţii de mai sus sunt echivalente.

2.10. Să se arate că pentru orice număr cardinal α avem $\alpha + 1 = \alpha$ dacă şi numai dacă α este infinit.

2.11. Să se arate că pentru orice cardinal infinit α şi orice număr natural n avem $\alpha + n = \alpha$.

2.12. Fie M o mulţime oarecare. Să se arate că:

(i) $|P(M)| = 2^{|M|}$;

(ii) $\alpha < 2^\alpha$ (adică $\alpha \le 2^\alpha$ şi $\alpha \ne 2^\alpha$) pentru orice cardinal α.

2.13. Să se arate că dacă m este un număr cardinal a.î. $2 \le m$, atunci $m + m \le m\cdot m$.

2.14. Să se arate că dacă $A_i \sim B_i$, $i\in I$, iar $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ pentru orice $i \ne j$, atunci $\bigcup_{i\in I} A_i \sim \bigcup_{i\in I} B_i$.

2.15. Să se arate că pentru orice două numere cardinale α şi β avem $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ sau $\beta < \alpha$.

2.16. Să se arate că mulțimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ este numărabilă (deci $\aleph_0^2 = \aleph_0$).

2.17. Să se arate că:

(i) Reuniunea unei familii numărabile (disjuncte sau nu) de mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă;

(ii) Reuniunea unei familii numărabile de mulțimi finite este o mulțime cel mult numărabilă;

(iii) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este o mulțime cel mult numărabilă;

(iv) Produsul cartezian a două mulțimi numărabile este o mulțime numărabilă.

2.18. Să se arate că următoarele mulțimi sunt numărabile:

(i) mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi;

(ii) mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale;

(iii) mulțimea $\mathbb{P}$ a numerelor prime;

(iv) mulțimea polinoamelor cu coeficienți raționali;

(v) mulțimea A a numerelor algebrice.

2.19. Fie A o mulțime infinită. Să se arate că:

(i) Există mulțimile B, C cu $\varnothing \neq B,\ C \subsetneq A$, $A = B \cup C$, $B \cap C = \varnothing$, $|C| = \aleph_0$;

(ii) Oricare ar fi mulțimea X cu $|X| \leq \aleph_0$ avem

$$|A \cup X| = |A|.$$

2.20. Să se arate că mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este nenumărabilă.

2.21. Să se arate că pentru orice numere reale a, b, c, d cu $a < b$ şi $c < d$, avem relațiile:

(i) $[a,b] \sim [c,d]$, $(a,b) \sim (c,d)$;

(ii) $[a,b) \sim (a,b) \sim (a,b] \sim [a,b]$;

(iii) $[a,b) \sim [c,d)$;

(iv) $[0,\infty) \sim [a,b] \sim (-\infty,0]$;

(v) $\mathbb{R} \sim (a,b)$.

2.22. Să se demonstreze că mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale este infinită.

2.23. Să se arate că o mulțime M este infinită dacă şi numai dacă există o funcție injectivă $f : \mathbb{N} \to M$.

2.24. Să se arate că un număr cardinal α este număr natural dacă şi numai dacă $\alpha < \aleph_0$.

2.25. Să se arate că următoarele mulțimi sunt de puterea continuului:

(i) orice interval de forma $[a,b)$, (a,b), $[a,b]$ $(a \neq b)$;

(ii) mulțimea I a numerelor iraționale;

(iii) mulțimea T a numerelor transcendente (complementara în $\mathbb{R}$ a mulțimii numerelor algebrice);

(iv) mulțimea $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ a şirurilor de numere naturale.

2.26. Să se arate că:

(i) Reuniunea unei familii finite şi disjuncte de mulțimi de puterea continuului este o mulțime de puterea continuului;

(ii) Reuniunea unei familii numărabile şi disjuncte de mulțimi de puterea continuului este o mulțime de puterea continuului;

(iii) Produsul cartezian a două mulțimi de puterea continuului este o mulțime de puterea continuului.

2.27. Fie A o mulțime arbitrară, iar

$F(A) = \{X \mid X \subset A, X \text{ finită}\}$ şi $N(A) = \{X \mid X \subset A, |X| = \aleph_0\}$.

Să se arate că :

(i) dacă A este finită atunci

$$0 = |N(A)| \leq |A| < |F(A)| = P(A)|;$$

(ii) dacă A este numărabilă atunci

$|A| = |F(A)| = \aleph_0 < c = |N(A)| = |P(A)|$;

(iii) dacă A este de puterea continuului atunci

$|A| = |F(A)| = |(N(A)| = c < |P(A)|$.

2.28. Să se calculeze cardinalele următoarelor mulțimi :

(i) $P(\mathbb{N})$;

(ii) $P(\mathbb{R})$;

(iii) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2.29. Să se demonstreze că au loc egalitățile :

(i) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$;

(ii) $\underbrace{\aleph_0 + \ldots + \aleph_0}_{\aleph_0} = \aleph_0^2 = \aleph_0$;

(iii) $c^2 = c$;

(iv) $c^{\aleph_0} = c$;

(v) $c + c = c$;

(vi) $\aleph_0^{\aleph_0} = c$;

(vii) $\aleph_0 \cdot c = c$.

§ 3. Relații de preordine (ordine). Elemente speciale într-o mulțime ordonată.

3.1. Pe mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale considerăm relația de divizibilitate notată prin $"|"$. Să se arate că :

(i) Relația $"|"$ este o ordine pe $\mathbb{N}$;

(ii) Față de ordinea $"|"$, 1 este cel mai mic element şi 0 este cel mai mare element ;

(iii) Ce se întâmplă cu relația de divizibilitate (din punctul de vedere al lui (i) şi (ii)) pe $\mathbb{Z}$?

(iv) Să se caracterizeze elementele minimale ale mulțimii $M = \{ n\in\mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ față de relația de divizibilitate ;

(v) Este relația de divizibilitate o ordine totală pe $\mathbb{N}$?

3.2. Fie M o mulțime nevidă iar P(M) mulțimea submulțimilor lui M.

(i) Să se arate că (P(M), $\subseteq$) este mulțime ordonată cu **0** şi **1** ;

(ii) Este incluziunea o relație de ordine totală pe P(M) ?

3.3. Pe $\mathbb{N}$ considerăm ordinea naturală dată de:

$$m \leq n \Leftrightarrow \text{există } p\in\mathbb{N} \text{ a.î. } m+p = n.$$

Să se arate că $(\mathbb{N}, \leq)$ este o mulțime total ordonată cu **0**.

3.4. Să se arate că $\mathbb{N}$ împreună cu ordinea naturală este o mulțime bine ordonată.

3.5. Fie $(M, \leq)$ o mulțime preordonată şi $\rho \subseteq M \times M$ o relație de echivalență pe M compatibilă cu $\leq$ (adică $x\ \rho\ x'$, $y\ \rho\ y'$ şi $x \leq y \Rightarrow x' \leq y'$). Pentru două clase de echivalență $[x]_\rho, [y]_\rho \in M/\rho$ definim : $[x]_\rho \leq [y]_\rho \Leftrightarrow$ există $x'\in[x]_\rho$, $y'\in[y]_\rho$ a.î. $x' \leq y'$.

Să se arate că în felul acesta $(M/\rho, \leq)$ devine o mulțime preordonată iar $p_M : M \to M/\rho$, $p_M(x) = [x]_\rho$ este o aplicație izotonă.

Observație. Relația $\leq$ de pe M/ρ poartă numele de *preordinea cât*.

3.6. Fie $(M, \leq)$ o mulțime preordonată. Să se arate că există o mulțime ordonată $\overline{M}$ şi o aplicație izotonă p_M: $M \to \overline{M}$ cu proprietatea că pentru orice mulțime ordonată N şi orice aplicație izotonă $g : M \to N$, există o singură aplicație izotonă $\overline{g} : \overline{M} \to N$ a.î. $\overline{g} \circ p_M = g$.

3.7. Să se arte că dacă $(A, \leq)$ este o mulțime ordonată, atunci există sup(S) pentru orice $S \subseteq A$ dacă şi numai dacă există inf (S) pentru orice $S \subseteq A$.

3.8. Să se arate că dacă $(P_i, \leq)_{1\leq i\leq n}$ este o familie finită de mulțimi ordonate, atunci $P = P_1 \times P_2 \ldots \times P_n$ devine mulțime ordonată, definind pentru $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$, $y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in P$,

$$x \leq y \Leftrightarrow \text{există } 1 \leq s \leq n \text{ a.î. } x_1 = y_1, \ldots, x_s = y_s \text{ şi } x_{s+1} < y_{s+1}.$$

Observație. Această ordine poartă numele de *ordinea lexicografică*.

3.9. Fie $(P_i)_{i\in I}$ o familie nevidă de mulțimi ordonate, $P = \prod_{i\in I} P_i$ (produsul direct de mulțimi) şi pentru orice $i\in I$, $p_i : P \to P_i$ *proiecția de rang i*, $p_i((x_j)_{j\in J}) = x_i$. Pe P definim pentru $x = (x_i)_{i\in I}$, $y = (y_i)_{i\in I} \in P$: $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i$, pentru orice $i\in I$.

Să se arate că:

(i) $(P, \leq)$ devine mulțime ordonată iar fiecare proiecție p_i este o funcție izotonă;

(ii) $(P, \leq)$ împreună cu proiecțiile $(p_i)_{i\in I}$ verifică următoarea proprietate de universalitate :

Pentru orice mulțime ordonată $(P', \leq)$ și orice familie de funcții izotone $(p_i')_{i\in I}$ cu $p_i' : P' \to P_i$, există o unică funcție izotonă $u : P' \to P$ a.î. $p_i \circ u = p_i'$, pentru orice $i \in I$.

Observație. $(P, \leq)$ împreună cu proiecțiile $(p_i)_{i\in I}$ poartă numele de *produsul direct al familiei de mulțimi ordonate $(P_i, \leq)_{i\in I}$.*

3.10. Dacă P_1 și P_2 sunt două lanțuri rezultă că și $P_1 \times P_2$ este lanț ?

3.11. Fie $(I, \leq)$ o mulțime ordonată, $(P_i)_{i\in I}$ o familie nevidă de mulțimi ordonate, $S = \coprod_{i\in I} P_i$ (sumă directă de mulțimi !) și $\alpha_i : P_i \to S$, $\alpha_i(x) = (x,i)$ *injecția canonică de rang i.*

Pentru $(x,i), (y,j) \in S$ definim relația $(x,i) \leq (y,j) \Leftrightarrow i = j$ și $x \leq y$. Să se arate că:

(i) $(S, \leq)$ devine mulțime ordonată iar fiecare injecție α_i este o funcție izotonă;

(ii) $(S, \leq)$ împreună cu injecțiile $(\alpha_i)_{i\in I}$ verifică următoarea proprietate de universalitate :

Pentru orice mulțime ordonată $(S', \leq)$ și orice familie de funcții izotone $(\alpha_i')_{i\in I}$ cu $\alpha_i' : P_i \to S'$, există o unică funcție izotonă $u : S \to S'$ a.î. $u \circ \alpha_i = \alpha_i'$, pentru orice $i \in I$.

Observație. $(S, \leq)$ împreună cu injecțiile $(\alpha_i)_{i\in I}$ poartă numele de *suma directă a familiei de mulțimi ordonate $(P_i, \leq)_{i\in I}$.*

3.12. Fie $(I, \leq)$ o mulțime ordonată, $(P_i)_{i\in I}$ o familie nevidă de mulțimi ordonate, $S = \coprod_{i\in I} P_i$ (sumă directă de mulțimi !) și $\alpha_i : P_i \to S$, $\alpha_i(x) = (x,i)$ injecția canonică de rang i. Pentru (x,i), $(y,j) \in S$ definim relația $(x,i) \leq (y,j) \Leftrightarrow (i < j)$ sau $(i = j$ și $x \leq y)$.

Să se arate că:

(i) $(S, \leq)$ devine mulțime ordonată iar fiecare injecție α_i este o funcție izotonă;

(ii) $(S, \leq)$ împreună cu injecțiile $(\alpha_i)_{i\in I}$ verifică următoarea proprietate de universalitate :

Pentru orice mulțime ordonată $(S', \leq)$ şi orice familie de funcții izotone $(\alpha_i')_{i\in I}$ cu $\alpha_i' : P_i \to S'$ şi a.î. pentru orice $i < j$ din I, fiecare element din $\alpha_j'(P_j)$ este majorant pentru $\alpha_i'(P_i)$, există o unică funcție izotonă $u : S \to S'$ a.î. $u \circ \alpha_i = \alpha_i'$, pentru orice $i \in I$.

Observație. $(S, \leq)$ împreună cu injecțiile $(\alpha_i)_{i\in I}$ poartă numele de *suma directă ordonată a familiei de mulțimi ordonate $(P_i, \leq)_{i\in I}$.*

3.13. Fie A o mulțime oarecare iar $(P, \leq)$ o mulțime ordonată. Definim $Hom(A, P) = \{f : A \to P\}$ iar pentru $f,g \in Hom(A, P)$, $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$, pentru orice $x \in A$. Să se arate că în felul acesta Hom(A, P) devine mulțime ordonată.

3.14. Fie M şi N două mulțimi nevide iar

$$\mathbf{P} = \{ (M',f) \mid M' \subseteq M \text{ şi } f : M' \to N\}.$$

Pentru $(M_1, f_1), (M_2, f_2) \in \mathbf{P}$ definim relația:

$$(M_1, f_1) \leq (M_2, f_2) \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2 \text{ şi } f_{2|M_1} = f_1.$$

Să se arate că $\leq$ este o relație de ordine pe **P**.

3.15. Fie $(M, \leq)$ şi $(N, \leq)$ două mulțimi ordonate şi $f : M \to N$ o funcție izotonă. Să se arate că:

(i) $f(\inf(A)) \leq \inf(f(A))$ şi $\sup(f(A)) \leq f(\sup(A))$ pentru orice $A \subseteq M$ (dacă infimumul şi supremumul există!); să se dea exemple în care relațiile de inegalitate sunt stricte;

(ii) Dacă f este un izomorfism de ordine, atunci în (i) avem egalitate.

3.16. Fie $(M, \leq)$ şi $(N, \leq)$ două mulțimi ordonate iar $f: M \to N$ o funcție izotonă pentru care există $g: N \to M$ izotonă a.î. $g\circ f = 1_M$. Să se demonstreze că dacă N este completă, atunci şi M este completă.

3.17. Să se arate că produsul direct al unei familii finite de mulțimi total ordonate, cu ordinea lexicografică devine o mulțime total ordonată.

§4. Latici.

4.1. Să se arate că dacă L este o latice, atunci pentru orice trei elemente $a,b,c\in L$ avem:

(i) $a \leq b \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge c$ şi $a \vee c \leq b \vee c$;

(ii) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$;

(iii) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

(iv) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge$ $\wedge (a \vee c)$;

(v) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee (a \wedge c))$.

4.2. (*Dedekind*). Să se arate că pentru o latice L următoarele afirmaţii sunt echivalente:

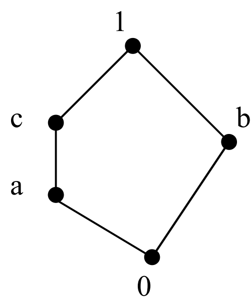
(i) Pentru orice $a, b, c\in L$, $c \leq a$, avem $a \wedge (b \vee c) =$ $= (a \wedge b)\vee c$;

(ii) Pentru orice $a, b, c\in L$, dacă $c \leq a$, atunci $a \wedge (b \vee c) \leq$ $\leq (a \wedge b) \vee c$;

(iii) Pentru orice $a, b, c\in L$ avem $((a \wedge c) \vee b) \wedge c =$ $= (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$;

(iv) Pentru orice $a, b, c\in L$, dacă $a \leq c$, atunci din $a \wedge b = c \wedge b$ şi $a \vee b = c \vee b$ deducem că $a = c$;

(v) L nu are sublatici izomorfe cu $\mathbf{N_5}$, unde $\mathbf{N_5}$ are următoarea diagramă Hasse:



Observație. O latice în care se verifică una din echivalențele de mai sus se zice *modulară* .

4.3. Să se arate că pentru o latice L următoarele afirmații sunt echivalente:

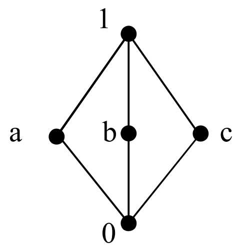
(i) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ pentru orice $a, b, c \in L$;
(ii) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ pentru orice $a, b, c \in L$;

(iii) $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ pentru orice $a, b, c \in L$;

(iv) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$ pentru orice $a, b, c \in L$;

(v) Pentru orice $a, b, c \in L$, dacă $a \wedge c = b \wedge c$ şi $a \vee c = b \vee c$, atunci $a = b$;

(vi) L nu are sublatici izomorfe cu $\mathbf{N_5}$ sau $\mathbf{M_5}$, unde $\mathbf{M_5}$ are următoarea diagramă Hasse:



Observație. O latice în care se verifică una din echivalențele de mai sus se zice *distributivă*.

4.4. Să se arate că orice mulțime total ordonată este o latice distributivă.

Consecință: $(\mathbb{R}, \leq)$ este o latice distributivă.

4.5. Să se arate că $(\mathbb{N}, |)$ este o latice distributivă cu **0** şi **1** (vezi problema **3.1.**).

4.6. Dacă M este o mulţime, atunci $(P(M), \subseteq)$ este o latice distributivă cu **0** şi **1** (vezi problema **3.2.**).

4.7. Să se arate că laticea $\mathbf{N_5}$ nu este modulară.

4.8. Să se demonstreze că orice latice distributivă este modulară, reciproca nefiind adevărată.

4.9. Fie L o mulţime şi $\wedge, \vee : L \times L \to L$ două operaţii binare asociative, comutative, idempotente şi cu proprietatea de absorbţie (adică pentru orice $x,y \in L$ avem $x \wedge (x \vee y) = x$ şi $x \vee (x \wedge y) = x$).

Să se arate că:

(i) Pentru orice $x,y \in L$, $x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$;

(ii) Definind pentru $x,y \in L$:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y,$$

atunci $(L, \leq)$ devine o latice în care $\wedge$ şi $\vee$ joacă rolul infimumului şi respectiv supremumului.

4.10. (*Scholander*). Fie L o mulţime şi $\wedge, \vee : L \times L \to L$ două operaţii binare. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $(L, \wedge, \vee)$ este o latice distributivă;

(ii) În L sunt adevărate următoarele identităţi:

1) $x \wedge (x \vee y) = x$;

2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge x) \vee (y \wedge x)$.

4.11. (*Ferentinou-Nicolacopoulou*). Fie L o mulţime, $\mathbf{0} \in L$ şi $\wedge, \vee : L \times L \to L$ două operaţii binare. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $(L, \wedge, \vee)$ este o latice distributivă cu **0**;

(ii) În L sunt adevărate următoarele identităţi:

1) $x \wedge (x \vee y) = x$;
2) $x \wedge (y \vee z) = (z \wedge (x \vee \mathbf{0})) \vee (y \wedge (x \vee \mathbf{0}))$.

4.12. Fie L o latice mărginită şi distributivă, $(a_i)_{i\in I} \subseteq L$ iar $c\in L$ un element ce are complement.

Să se arate că:

(i) Dacă există $\bigvee_{i\in I} a_i$ în L, atunci $c \wedge (\bigvee_{i\in I} a_i) = \bigvee_{i\in I} (c \wedge a_i)$;

(ii) Dacă există $\bigwedge_{i\in I} a_i$ în L, atunci $c \vee (\bigwedge_{i\in I} a_i) = \bigwedge_{i\in I} (c \vee a_i)$.

4.13. Fie $(G,\cdot)$ un grup iar $L(G,\cdot)$ (sau $L(G)$ dacă nu este pericol de confuzie în ceea ce priveşte operația algebrică de pe G) mulțimea subgrupurilor lui G.

Să se arate că $(L(G,\cdot), \subseteq)$ este o latice completă.

4.14. Să se arate că în laticea $(L(\mathbb{Z},+), \subseteq)$ pentru $H = m\mathbb{Z}$ şi $K = n\mathbb{Z}$ (cu $m,n\in\mathbb{N}$) avem:

(i) $H \subseteq K \Leftrightarrow n \mid m$;

(ii) $H \wedge K = [m,n]\mathbb{Z}$;

(iii) $H \vee K = (m,n)\mathbb{Z}$;

(iv) Să se deducă faptul că laticea $(L(\mathbb{Z},+), \subseteq)$ este distributivă.

4.15. Să se dea exemple de grupuri G pentru care laticea $(L(G), \subseteq)$ nu este distributivă.

4.16. Fie G un grup iar $L_0(G,\cdot)$ mulțimea subgrupurilor normale ale lui G.

Să se arate că $L_0(G)$ este sublatice modulară a lui $L(G)$.

4.17. Dacă M este un A-modul, atunci notând prin $L_A(M)$ mulțimea submodulelor lui M, să se arate că $(L_A(M), \subseteq)$ este o latice completă, modulară.

4.18. Fie L o latice completă cu **0** şi f : L$\rightarrow$ L o aplicaţie izotonă. Să se demonstreze că există a$\in$L a.î. f(a) = a.

4.19. Fie L o latice. Presupunând că pentru orice a, b$\in$L există:

$$a \rightarrow b = \sup \{x\in L \mid a \wedge x \leq b\},$$

să se arate că L este o latice distributivă .

Observaţie. a $\rightarrow$ b se numeşte de *pseudocomplementul* lui a relativ la b.

4.20. Să se arate că dacă mulţimea (P, $\leq$) de la problema **3.13.** este o latice iar A o mulţime oarecare, atunci şi Hom(A, P) este o latice.

4.21. Fie C[0,1] = { f : [0,1] $\rightarrow\mathbb{R}$ | f este continuă}.

Pentru f, g $\in$ C[0,1] definim $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$, oricare ar fi x$\in$[0,1]. Să se demonstreze că (C[0,1], $\leq$) este o latice.

4.22. Fie L o latice şi X ,Y două submulţimi finite ale lui L. Să se arate că:

$$\inf (X) \wedge \inf (Y) = \inf (X \cup Y).$$

4.23. Dacă o latice conţine un element maximal (minimal) atunci acesta este unic.

4.24. Dacă (L, $\vee$) este o sup – semilatice şi S $\subseteq$ L este o submulţime nevidă a sa, atunci idealul (S] generat de S este caracterizat de:

$$(S] = \{ a\in L \mid \text{există } s_1, \ldots, s_n\in S \text{ a.î. } a \leq s_1 \vee\ldots\vee s_n\}.$$

*Observaţie.*În particular, *idealul principal* generat de un element s$\in$L este caracterizat de:

$$(s]= \{ a\in L \mid a \leq s\}.$$

4.25. Dacă (L, $\vee$) este o inf – semilatice şi S $\subseteq$ L este o submulţime nevidă a sa, atunci filtrul [S) generat de S este caracterizat de:

$[S) = \{ a\in L \mid$ există $s_1, \ldots, s_n\in S$ a.î. $s_1 \wedge\ldots\wedge s_n \leq a\}$.

*Observaţie.*În particular, *filtrul principal* generat de un element $s\in L$ este caracterizat de:

$[s)= \{ a\in L \mid s \leq a\}$.

4.26. Pentru o latice L notăm prin I(L) (respectiv F(L)) mulţimea idealelor (filtrelor) lui L. Să se demonstreze că (I(L), $\subseteq$) şi (F(L), $\subseteq$) sunt latici complete.

4.27. Pentru o latice L şi o submulţime F$\subseteq$ L următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) F este *filtru prim* (adică este o mulţime nevidă proprie a.î. pentru orice x, y$\in$L, $x \vee y\in F \Rightarrow x\in F$ sau $y\in F$);

(ii) F este filtru propriu şi pentru orice x, y$\in$L, $x \vee y\in F \Leftrightarrow x\in F$ sau $y\in F$;

(iii) I = L \ F este *ideal prim* (adică o mulţime nevidă proprie a.î. pentru orice x, y$\in$L, $x \wedge y\in I \Rightarrow x\in I$ sau $y\in I$);

(iv) Există un morfism surjectiv de latici $h : L\rightarrow\{0,1\}$ a.î. $F = h^{-1}(\{1\})$.

4.28. (*Teorema filtrului (idealului) prim*). Fie L o latice distributivă, F un filtru şi I un ideal al lui L. Dacă $F\cap I = \emptyset$ atunci există un filtru prim P a.î. $F \subseteq P$, $P\cap I = \emptyset$ şi un ideal prim J a.î. $I \subseteq J$, $J\cap F = \emptyset$.

4.29. Fie L o latice distributivă. Dacă I este un ideal (filtru) al lui L şi $a\in L \setminus I$, atunci există un filtru (ideal) prim P al lui L a.î. $a\in P$ şi $P\cap I = \emptyset$.

4.30. Fie L o latice distributivă. Dacă F este un filtru (ideal) al lui L şi $b\in L \setminus F$, atunci există un filtru (ideal) prim P al lui L a.î. $F\subseteq P$ şi $b\notin P$.

4.31. Fie L o latice distributivă. Dacă a, $b\in L$ a.î. $a \nleq b$, atunci există un filtru (ideal) prim P al lui L a.î. $a\in P$ şi $b\notin P$.

4.32. Să se demonstreze că într-o latice distributivă orice filtru propriu este inclus într-un filtru prim şi este o intersecţie de filtre prime.

4.33. Să se demonstreze că într-o latice distributivă orice filtru maximal este prim.

4.34. Fie L o latice modulară şi a, $b\in L$. Atunci:

$[a \wedge b, a] \approx [b, a \vee b]$ (izomorfism de latici).

Observaţie. Acest rezultat este cunoscut sub numele de *principiul de transpunere al lui Dedekind.*

4.35. Să se demonstreze că o latice L cu **0** şi **1** este distributivă dacă şi numai dacă pentru oricare două ideale I şi J ale lui L, $I \vee J = \{ i \vee j \mid i\in I \text{ şi } j\in J\}$.

4.36. Fie L o latice oarecare şi x, $y\in L$.

Să se demonstreze că:

(i) $(x] \wedge (y] = (x \wedge y]$ iar $(x] \vee (y] \subseteq (x \vee y]$;

(ii) Dacă L este distributivă cu **0** şi **1**, atunci:

$$(x] \vee (y] = (x \vee y].$$

4.37. Fie L o latice distributivă cu **0** şi **1** iar I, $J \in I(L)$.

Să se demonstreze că dacă $I \wedge J$ şi $I \vee J$ sunt ideale principale, atunci I şi J sunt ideale principale.

4.38. Să se demonstreze că într-o latice distributivă L cu **0** şi **1** un element nu poate avea decât cel mult un complement.

4.39. Fie L o latice distributivă cu **0** *pseudocomplementată* (adică pentru orice $a \in L$ există $a^* = \sup \{ x \in L \mid a \wedge x = \mathbf{0} \}$ numit *pseudocomplementul* lui a).

Să se arate că L are **1** şi pentru orice $a, b \in L$ avem:

(i) $a \wedge a^* = \mathbf{0}$;

(ii) $a \wedge b = \mathbf{0} \Leftrightarrow a \leq b^*$;

(iii) $a \leq b \Rightarrow b^* \leq a^*$;

(iv) $a \leq a^{**}$;

(v) $a^{***} = a^*$;

(vi) $a \wedge b = \mathbf{0} \Leftrightarrow a^{**} \wedge b = \mathbf{0}$;

(vii) $(a \wedge b)^* = (a^{**} \wedge b)^* = (a^{**} \wedge b^{**})^*$;

(viii) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$;

(ix) $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**}$;

(x) $(a \vee b)^{**} = a^{**} \vee b^{**}$.

4.40. Fie L o latice distributivă cu **0** şi **1**, $a \in L$ iar a' complementul lui a în L.

Să se demonstreze că a' (definit la problema **4.39.**) coincide cu $a \rightarrow \mathbf{0}$ (definit la problema **4.19**).

4.41. (*De Morgan*). Fie L o latice distributivă cu **0** şi **1**. Dacă $a, b \in L$ iar a' este complementul lui a şi b' este complementul lui b, atunci a', $a \wedge b$ şi $a \vee b$ au complemenţi şi anume:

$(a')' = a$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ şi $(a \vee b)' = a' \wedge b'$.

4.42. *(Glivenko)*.Pentru o latice L distributivă cu **0** şi pseudocomplementată notăm $R(L) = \{a^* \mid a \in L\}$, $D(L) = \{a \in L \mid a^* = \mathbf{0}\}$ şi considerăm $\varphi_L : L \rightarrow R(L)$, $\varphi_L(a) = a^{**}$, $a \in L$.

Să se arate că:

(i) $R(L) = \{a \in L \mid a = a^{**}\}$ şi este sublatice mărginită a lui L;

(ii) D(L) este filtru al lui L iar $D(L) \cap R(L) = \{\mathbf{1}\}$;

(iii) Pentru orice $a \in L$, $a^* \vee a \in D(L)$;

(iv) φ_L este morfism de latici pseudocomplementate (adică este morfism de latici cu 0 şi 1 şi în plus, $\varphi_L(a^*) = (\varphi_L(a))^*$ pentru orice $a \in L$) iar $L / D(L) \approx R(L)$ (izomorfism de latici cu **0** şi **1**).

4.43. Fie $(L_i)_{i\in I}$ o familie de latici iar $L = \prod_{i\in I} L_i$ (vezi problema **3.9.**).

Să se arate că:

(i) L este latice iar pentru orice $i \in I$ proiecţia $p_i : L \rightarrow L_i$ este morfism de latici;

(ii) Dubletul $(L,(p_i)_{i\in I})$ verifică următoarea proprietate de universalitate:

Pentru oricare alt dublet $(L', (p_i')_{i\in I})$ format dintr-o latice L' şi o familie de morfisme de latici $p_i' : L' \rightarrow L_i$ există un unic morfism de latici $u : L' \rightarrow L$ a.î. $p_i \circ u = p_i'$, pentru orice $i \in I$.

Observaţie. Dubletul $(L, (p_i)_{i\in I})$ poartă numele de *produsul direct al familiei de latici $(L_i)_{i\in I}$.*

4.44. Fie $(L_i)_{i\in I}$ o familie de latici complete. Să se arate că şi $\prod_{i\in I} L_i$ este o latice completă.

4.45. Să se arate că dacă $(L_i)_{i\in I}$ este o familie de latici distributive cu **0** şi **1**, atunci $\prod_{i\in I} L_i$ este de asemenea o latice distributivă cu **0** şi **1**.

4.46. Fie L şi L′ două latici şi $f: L \rightarrow L'$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este morfism de latici;

(ii) pentru orice $x, y \in L$ avem:

(1) $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$;

(2) $f(x \vee y) \le f(x) \vee f(y)$;

(3) $f(x) \wedge f(y) \le f(x \wedge y)$.

4.47. Fie L şi L′ două latici şi f: $L \to L'$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este morfism bijectiv de latici (adică f este izomorfism de latici);

(ii) f este morfism bijectiv de mulţimi ordonate (adică f este izomorfism de mulţimi ordonate).

4.48. Fie H o *algebră Heyting* (adică o latice cu **0** cu proprietatea că pentru orice a, b∈H există $a \to b$ definit în cadrul problemei **4.19.**).

Să se demonstreze că H are **1** şi că pentru orice x, y, z∈H avem:

(i) $x \wedge (x \to y) \le y$;

(ii) $x \wedge y \le z \Leftrightarrow y \le x \to z$;

(iii) $x \le y \Leftrightarrow x \to y = \mathbf{1}$;

(iv) $y \le x \to y$;

(v) $x \le y \Rightarrow z \to x \le z \to y$ şi $y \to z \le x \to z$;

(vi) $x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z$;

(vii) $x \wedge (y \to z) = x \wedge [(x \wedge y) \to (x \wedge z)]$;

(viii) $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$;

(ix) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$;

(x) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$;

(xi) $(x \to y)^* = x^{**} \wedge y^*$.

4.49. Fie (L, ≤) un lanţ cu **0** şi **1**. Să se demonstreze că L devine algebră Heyting, unde pentru a, b∈L,

$$a \to b = \begin{cases} 1, \text{dacă } a \le b \\ b, \text{dacă } b < a \end{cases}.$$

4.50. Fie (X,τ) un spaţiu topologic. Să se arate că dacă pentru $D_1, D_2 \in \tau$ definim $D_1 \to D_2 = \mathrm{int}[(X \setminus D_1) \cup D_2]$, atunci $(\tau, \to, \emptyset)$ este o algebră Heyting.

4.51. Fie L o latice distributivă cu **0** şi **1** iar a∈L un element ce are complementul a′.

Să se demonstreze că:

$L \approx (a] \times (a'] \approx (a] \times [a)$ (izomorfism de latici cu **0** şi **1**).

§5. Latici (algebre) Boole

5.1. Fie **2** = {0,1}. Să se arate că **2** devine în mod canonic latice Boole pentru ordinea naturală $0 \le 0$, $0 \le 1$, $1 \le 1$.

5.2. Dacă M este o mulțime nevidă, atunci (P(M), $\subseteq$) este o latice Boole.

5.3. Să se demonstreze că în orice algebră Boole $(B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$, pentru orice $x, y \in B$ avem:

(i) $(x')' = x$, $(x \vee y)' = x' \wedge y'$, $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, $\mathbf{0}' = \mathbf{1}$, $\mathbf{1}' = \mathbf{0}$;

(ii) $x \le y \Leftrightarrow y' \le x'$;

(iii) $x \wedge y' = \mathbf{0} \Leftrightarrow x \le y$;

(iv) $x \vee y' = \mathbf{1} \Leftrightarrow y \le x$;

(v) $x = y \Leftrightarrow (x' \wedge y) \vee (x \wedge y') = \mathbf{0}$;

(vi) $x = y \Leftrightarrow (x' \vee y) \wedge (x \vee y') = \mathbf{1}$.

5.4. Fie $n \ge 2$ un număr natural liber de pătrate iar D_n mulțimea divizorilor naturali ai lui n. Să se arate că $(D_n, |)$ este latice Boole în care pentru $p, q \in D_n$, $p \wedge q = (p, q)$, $p \vee q = [p, q]$, $\mathbf{0} = 1$, $\mathbf{1} = n$ iar $p' = n/p$.

5.5. Fie $(B, +, \cdot)$ un inel Boole şi $a, b \in B$. Să se arate că definind $a \le b \Leftrightarrow a \cdot b = a$, atunci $(B, \le)$ devine o latice Boole în care pentru $a, b \in B$, $a \wedge b = a \cdot b$, $a \vee b = a + b + a \cdot b$ şi $a' = \mathbf{1} + a$.

Reciproc, dacă $(B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ este o algebră Boole, să se arate că definind $a + b = (a' \wedge b) \vee (a \wedge b')$ şi $a \cdot b = a \wedge b$, atunci $(B, +, \cdot)$ devine inel Boole.

5.6. Fie $(B_1, +, \cdot)$, $(B_2, +, \cdot)$ două inele Boole iar $(B_1, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$, $(B_2, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ laticile Boole induse de acestea (conform problemei **5.5.**).

Să se demonstreze că $f : B_1 \to B_2$ este morfism de inele (unitare) dacă şi numai dacă f este morfism de algebre Boole.

5.7. Fie X o mulțime şi $Z(X) = \{A \subseteq X \mid A$ finită sau $X \setminus A$ finită$\}$. Să se arate că $(Z(X), \subseteq)$ devine latice Boole.

5.8. Să se arate că pentru un filtru propriu F al unei algebre Boole B următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) F este ultrafiltru;

(ii) Pentru orice $x \in B \setminus F$ avem că $x' \in F$.

5.9. Să se arate că pentru un filtru propriu F al unei algebre Boole B următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) F este ultrafiltru;

(ii) $0 \notin F$ şi pentru orice elemente $x, y \in B$ dacă $x \vee y \in F$ atunci $x \in F$ sau $y \in F$ (adică F este *filtru prim*).

5.10. Fie (B, $\wedge$, $\vee$, $'$, **0**, **1**) o algebră Boole. Pentru $M \subseteq B$ notăm $M' = \{x' \mid x \in M\}$.

Să se arate că:

(i) Dacă $F \in F(B)$, atunci $F' \in I(B)$;

(ii) Dacă $I \in I(B)$, atunci $I' \in F(B)$;

(iii) Dacă $F \in F(B)$, atunci $F \cup F'$ este subalgebră Boole a lui B în care F este ultrafiltru (reamintim că prin F(B) am notat mulțimea filtrelor lui B iar prin I(B) mulțimea idealelor lui B);

(iv) F(B) şi I(B) sunt față de incluziune latici complete, distributive.

5.11. Dacă B este o latice Boole iar $A \subseteq B$, vom spune că A are *proprietatea intersecției finite* (PIF) dacă infimumul oricărei părți finite a lui A este diferit de zero.

(i) Să se arate că dacă $A \subseteq B$ are (PIF), atunci pentru orice $x \in B$, $A \cup \{x\}$ sau $A \cup \{x'\}$ are (PIF);

(ii) Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de submulțimi ale lui B ce au fiecare (PIF) şi formează un lanț față de incluziune, atunci $\bigcup_{i\in I} A_i$ are (PIF).

5.12. Să se arate că orice filtru propriu F dintr-o latice Boole B se poate extinde la un ultrafiltru U_F.

5.13. Să se arate că orice mulțime de elemente ale unei latici Boole ce are (PIF) se poate extinde la un ultrafiltru.

5.14. Arătați că orice element $x \neq \mathbf{0}$ dintr-o latice Boole este conținut într-un ultrafiltru.

5.15. Dacă B este o latice Boole şi $x, y\in B$ cu $x \neq y$, atunci există un ultrafiltru U al lui B a.î. $x\in U$ şi $y\notin U$.

5.16. Fie I o mulțime. Să se arate că în laticea Boole $(P(I), \subseteq)$ un filtru F este principal dacă şi numai dacă $\cap\{X \mid X\in F\}\in F$.

5.17. Fie I o mulțime şi F un filtru principal în laticea Boole $(P(I), \subseteq)$. Dacă $F = [X_0)$ (cu $X_0 \subseteq I$) să se arate că F este ultrafiltru dacă şi numai dacă mulțimea X_0 este formată dintr-un singur element.

5.18. Dacă I este o mulțime, atunci orice ultrafiltru neprincipal al laticei Boole $(P(I), \subseteq)$ nu conține mulțimi finite.

5.19. Dacă I este o mulțime infinită, atunci laticea Boole $(P(X), \subseteq)$ conține ultrafiltre neprincipale.

5.20. Fie B_1 şi B_2 două algebre Boole iar $f : B_1 \to B_2$ o funcție. Să se arate că următoarele condiții sunt echivalente:

(i) f este morfism de algebre Boole;

(ii) f este morfism de latici mărginite;

(iii) f este morfism de inf-semilatici şi $f(x') = (f(x))'$ pentru orice $x \in B_1$;

(iv) f este morfism de sup-semilatici şi $f(x') = (f(x))'$ pentru orice $x \in B_1$.

5.21. Fie $f : B_1 \to B_2$ un morfism de algebre Boole iar $Ker(f) = f^{-1}\{\mathbf{0}\} = \{x \in B_1 \mid f(x) = \mathbf{0}\}$. Să se arate că $Ker(f) \in I(B_1)$ iar f este ca funcție o injecție dacă şi numai dacă $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

5.22. Fie $f : B_1 \to B_2$ un morfism de algebre Boole. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este izomorfism de algebre Boole;

(ii) f este surjectiv şi pentru orice $x, y \in B_1$ avem $x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$;

(iii) f este inversabilă şi f^{-1} este un morfism de algebre Boole.

5.23. Fie $(B_i)_{i \in I}$ o familie de algebre Boole iar $B = \prod_{i \in I} B_i$ (produs direct de mulțimi ordonate; vezi problema **3.9.**). Să se arate că B devine în mod canonic o algebră Boole, proiecțiile $(p_i)_{i \in I}$ sunt morfisme de algebre Boole iar dubletul $(B, (p_i)_{i \in I})$ verifică următoarea proprietate de universalitate:

Pentru oricare alt dublet $(B', (p_i')_{i \in I})$ cu B' algebră Boole iar $p_i' : B' \to B_i$ morfisme de algebre Boole, există un unic morfism de algebre Boole $u : B' \to B$ a.î. $p_i \circ u = p_i'$, pentru orice $i \in I$.

Observație. Dubletul $(B, (p_i)_{i \in I})$ poartă numele de *produsul direct al familiei de algebre Boole $(B_i)_{i \in I}$.*

5.24. Fie M o mulțime oarecare iar $\mathbf{2}^M = \{ f : M \to \mathbf{2} \}$. Definim pe $\mathbf{2}^M$ relația de ordine $f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$, pentru orice $x \in M$ (vezi problema **4.21**).

Să se arate că $(\mathbf{2}^M, \leq)$ devine latice Boole izomorfă cu laticea Boole $(P(M), \subseteq)$.

5.25. Fie $(B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ o algebră Boole, $a\in B$ şi $B_a = [\mathbf{0},a] = \{x\in B : \mathbf{0} \leq x \leq a\}$. Pentru $x\in B_a$ definim $x^* = x' \wedge a$.

Să se arate că:

(i) $(B_a, \wedge, \vee, {}^*, \mathbf{0}, a)$ este o algebră Boole;

(ii) $\alpha_a : B \to B_a$, $\alpha_a(x) = a \wedge x$, pentru $x\in B$ este morfism surjectiv de algebre Boole;

(iii) $B \approx B_a \times B_{a'}$ (izomorfism de algebre Boole).

5.26. Pe $P(\mathbb{N})$ definim relaţia $A \sim B \Leftrightarrow A \,\Delta\, B$ este finită.

Să se arate că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $P(\mathbb{N})$; notăm cu $A^{\sim}$ clasa de echivalenţă a lui $A\in P(\mathbb{N})$.

Să se arate că dacă pentru $A^{\sim}, B^{\sim}\in P(\mathbb{N})/\sim$ definim $A^{\sim} \leq B^{\sim} \Leftrightarrow A \setminus B$ este finită, atunci $(P(\mathbb{N})/\sim, \leq)$ este o latice Boole.

5.27. Într-o algebră Boole $(B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$, pentru $x,y\in B$ definim:

$$x \to y = x' \vee y \text{ şi } x \leftrightarrow y = (x\to y) \wedge (y\to x).$$

Să se arate că pentru orice $x,y,z\in B$ avem:

(i) $x \leq y \Leftrightarrow x \to y = 1$;

(ii) $x \to \mathbf{0} = x'$, $\mathbf{0} \to x = \mathbf{1}$, $x \to \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \to x = x$, $x \to x = \mathbf{1}$, $x' \to x = x$, $x \to x' = x'$;

(iii) $x\to (y\to x) = \mathbf{1}$;

(iv) $x\to (y \to z) = (x \to y) \to (x\to z)$;

(v) $x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z$;

(vi) Dacă $x \leq y$, atunci $z \to x \leq z \to y$ şi $y \to z \leq x \to z$;

(vii) $(x \to y) \wedge y = y$, $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$;

(viii) $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$;

(ix) $((x \to y) \to y) \to y = x \to y$;

(x) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x = x \vee y$;

(xi) $x \to y = \sup \{ z \in B \mid x \wedge z \le y \}$;
(xii) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$;
(xiii) $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$;
(xiv) $x \wedge (y \to z) = x \wedge [(x \wedge y) \to (x \wedge z)]$;
(xv) $x \leftrightarrow y = \mathbf{1} \Leftrightarrow x = y$.

5.28. Fie $(B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ o algebră Boole iar $F \in F(B)$. Pe B definim următoarele relații binare:

$$x \sim_F y \Leftrightarrow \text{există } f \in F \text{ a.î. } x \wedge f = y \wedge f,$$
$$x \approx_F y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y \in F$$

(unde $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x) = (x' \vee y) \wedge (y' \vee x)$).

Să se arate că:

(i) $\sim_F \; = \; \approx_F \; \overset{not}{=} \; \rho_F$;

(ii) ρ_F este o congruență pe B;

(iii) Dacă pentru $x \in B$ notăm prin x/F clasa de echivalență a lui x relativă la ρ_F, $B/F = \{x/F \mid x \in B\}$, atunci definind pentru $x, y \in B$, $x/F \wedge y/F = (x \wedge y)/F$, $x/F \vee y/F = (x \vee y)/F$ şi $(x/F)' = x'/F$, atunci $(B/F, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ devine în mod canonic algebră Boole (unde $\mathbf{0} = \{\mathbf{0}\}/F = \{ x \in B \mid x' \in F\}$ iar $\mathbf{1} = \{\mathbf{1}\}/F = F$).

5.29. Fie B_1, B_2 două algebre Boole iar $f : B_1 \to B_2$ este un morfism de algebre Boole. Să se arate că dacă notăm prin

$$F_f = f^{-1}(\{\mathbf{1}\}) = \{x \in B_1 \mid f(x) = \mathbf{1}\}, \text{ atunci:}$$

(i) $F_f \in F(B_1)$;

(ii) f ca funcție este injecție $\Leftrightarrow F_f = \{\mathbf{1}\}$;

(iii) $B_1 / F_f \approx Im(f)$ (unde $Im(f) = f(B_1)$).

5.30. Să se arate că pentru un filtru propriu F al unei algebre Boole B următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) F este ultrafiltru;

(ii) $B/F \approx \mathbf{2}$.

5.31. (*Stone*). Pentru orice algebră Boole B există o mulțime M a.î. B este izomorfă cu o subalgebră Boole a algebrei Boole $(P(M), \subseteq)$.

5.32. (*Glivenko*). Fie (L, $\wedge$, *, **0**) o inf – semilatice pseudocomplementată. Atunci cu ordinea indusă de ordinea de pe L, R(L) devine algebră Boole iar L / D(L) $\approx$ R(L) (izomorfism de algebre Boole – vezi problema **4.42.** (iv)).

5.33. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel Boole (unitar), $A' \subseteq A$ un subinel propriu, $a \in A \setminus A'$ iar $A'(a)$ subinelul lui A generat de $A' \cup \{a\}$.

Să se arate că:

(i) $A'(a) = \{ x + y\cdot a \mid x, y \in A'\}$;

(ii) Pentru orice inel Boole C complet (față de ordinea definită conform problemei **5.5.**) şi orice morfism (unitar) de inele $f : A' \to C$ există un morfism (unitar) de inele $f' : A'(a) \to C$ a.î. $f'_{|A'} = f$.

5.34. (*Nachbin*). Să se demonstreze că o latice distributivă mărginită L este o latice Boole dacă şi numai dacă orice filtru prim al lui L este maximal.

5.35. (*Nachbin*). Să se demonstreze că o latice marginită L este o latice Boole dacă şi numai dacă notând prin Spec(L) mulțimea idealelor prime ale lui L, atunci (Spec(L), $\subseteq$) este *neordonată* (adică pentru orice $P,Q \in$ Spec(L), $P \neq Q$, $P \not\subset Q$ şi $Q \not\subset P$).

§6. Calculul propozițiilor

Reamintim că sistemul formal al calculului propozițional este format din următoarele simboluri:

(1) *Variabile propoziționale*, notate u, v, w, … (eventual cu indici) a căror mulțime o notăm prin V şi se presupune numărabilă,

(2) *Conectorii* sau *simbolurile logice*:

$\rceil$: *simbolul de negație* (va fi citit : *non*),

$\rightarrow$: *simbolul de implicație* (va fi citit : *implică*),

(3) *Simbolurile de punctuație*: (,), [,] (parantezele).

Numim *cuvânt* (sau *asamblaj*) un şir finit format din simbolurile (1)-(3) scrise unul după altul.

Numim *formulă* orice cuvânt φ ce verifică una din condițiile următoare:

(i) φ este o variabilă propozițională,

(ii) există o formulă ψ a.î. $\varphi = \rceil\psi$,

(iii) există formulele ψ, θ a.î. $\varphi = \psi\rightarrow\theta$.

Vom nota prin F mulțimea formulelor.

Observație. Putem considera definirea noțiunii de formulă de mai sus ca fiind dată prin inducție: momentul inițial al definiției prin inducție este dat de condiția (i) iar analogul trecerii de la „k la k+1” din inducția matematică completă este asigurat de (ii) şi (iii).

Introducem abrevierile: $\vee$ (*disjuncția*), $\wedge$ (*conjuncția*) şi $\leftrightarrow$ (*echivalența logică*) astfel:

$\varphi\vee\psi = \rceil\varphi\rightarrow\psi$,

$\varphi\wedge\psi = \rceil(\varphi\rightarrow\rceil\psi)$ şi

$\varphi\leftrightarrow\psi = (\varphi\rightarrow\psi)\wedge(\psi\rightarrow\varphi)$ pentru orice $\varphi, \psi\in F$.

O *axiomă* a sistemului formal al calculului propozițional are una din următoarele forme:

A_1: $\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)$,

A_2: $(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\chi))\rightarrow((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\chi))$,

A_3: $(\rceil\varphi\rightarrow\rceil\psi)\rightarrow(\psi\rightarrow\varphi)$.

O *teoremă formală* (pe scurt, o *teoremă*) este o formulă φ ce verifică una din următoarele condiții:

(T$_1$) φ este o axiomă,

(T$_2$) Există o formulă ψ a.î. ψ şi ψ→φ sunt teoreme.

Condiția (T$_2$) se scrie schematic $\frac{\psi, \psi \to \varphi}{\varphi}$ şi se numeşte regula de deducție *modus ponens* (scris prescurtat m.p.).

O *demonstrație formală* a unei formule φ este un şir finit de formule $\varphi_1, ..., \varphi_n$ a.î. $\varphi_n = \varphi$ şi pentru orice $1 \leq i \leq n$ se verifică una din condițiile următoare:

(1) φ_i este o axiomă,

(2) Există doi indici k, j < i a.î. $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$.

Se observă că proprietățile (1) şi (2) de mai sus nu exprimă altceva decât condițiile (T$_1$) şi (T$_2$), deci formula φ este o teoremă formală dacă şi numai dacă admite o demonstrație formală $\varphi_1, ..., \varphi_n$ (n se numeşte *lungimea demonstrației formale* a lui φ).

Vom consemna faptul că φ este o teoremă formală scriind $\vdash \varphi$ iar mulțimea formulelor demonstrabile o vom nota prin *Prov*.

Evident, o teoremă poate avea demonstrații formale de lungimi diferite.

Fie Γ o mulțime de formule şi φ o formulă. Vom spune că enunțul φ este *dedus din ipotezele Γ*, dacă una din condițiile următoare este verificată:

(D$_1$) φ este o axiomă,

(D$_2$) $\varphi \in \Gamma$,

(D$_3$) Există o formulă ψ a.î. ψ şi ψ→φ sunt deduse din ipotezele Γ.

Condiția (D$_3$) se mai scrie $\frac{\Gamma \vdash \psi, \psi \to \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$ şi se numeşte tot modus ponens. Dacă φ este dedus din Γ vom nota $\Gamma \vdash \varphi$.

O Γ - *demonstrație formală* a unei formule φ este un şir de formule $\varphi_1, ..., \varphi_n$ a.î. $\varphi_n = \varphi$ şi pentru orice $1 \leq i \leq n$ se verifică una din condițiile următoare:

(1) φ_i este o axiomă,

(2) $\varphi_i \in \Gamma$,

(3) Există doi indici k, j < i a.î. $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$.

Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există o Γ - demonstrație lui φ.

Observație. (i) $\emptyset \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vdash \varphi$,

(ii) Dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\Gamma \subseteq F$.

Prin L_2 notăm algebra Boole cu două elemente {0, 1}.

6.1. (*Principiul identității*). Să se demonstreze că dacă $\varphi \in F$, atunci

$$\vdash \varphi \to \varphi.$$

6.2. Să se demonstreze că dacă φ, ψ, $\chi \in F$, atunci

$$\vdash (\psi \to \chi) \to [(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)].$$

6.3. Să se demonstreze că dacă φ, $\psi \in F$, atunci

$$\vdash (\rceil \varphi) \to (\varphi \to \psi).$$

6.4. (*Principiul terțului exclus*). Să se demonstreze că dacă $\varphi \in F$, atunci

$$\vdash \varphi \vee (\rceil \varphi).$$

6.5. Fie Γ, $\Delta \subseteq F$ şi $\varphi \in F$. Să se demonstreze că

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$ şi $\Gamma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$;

(ii) Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci există $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finită a.î. $\Gamma' \vdash \varphi$;

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \chi$, pentru orice $\chi \in \Delta$ şi $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$.

6.6. (*Teorema deducției*). Să se demonstreze că dacă φ, $\psi \in F$ şi $\Gamma \subseteq F$, atunci

$\Gamma\vdash(\varphi\to\psi)$ dacă şi numai dacă $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\psi$.

6.7. Să se demonstreze că dacă φ, ψ, $\chi\in F$, atunci

$$\vdash (\varphi\to\psi)\to((\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi)).$$

6.8. Să se demonstreze că dacă φ, ψ, $\chi\in F$, atunci

$$\vdash (\varphi\to(\psi\to\chi))\to(\psi\to(\varphi\to\chi)).$$

6.9. Să se demonstreze că dacă φ, $\psi\in F$, atunci

$$\vdash \varphi\to(\rceil\varphi\to\psi).$$

6.10. Să se demonstreze că dacă φ, $\psi\in F$, atunci

$$\vdash \rceil\varphi\to(\varphi\to\psi).$$

6.11. Să se demonstreze că dacă $\varphi\in F$, atunci

$$\vdash \rceil\rceil\varphi\to\varphi.$$

6.12. Să se demonstreze că dacă φ, $\psi\in F$, atunci

$$\vdash (\varphi\to\psi)\to(\rceil\psi\to\rceil\varphi).$$

6.13. Să se demonstreze că dacă $\varphi\in F$, atunci

$$\vdash \varphi\to\rceil\rceil\varphi.$$

6.14. Să se demonstreze că dacă $\varphi\in F$, atunci

$$\vdash (\varphi\to\rceil\varphi)\to\rceil\varphi.$$

6.15. Să se demonstreze că dacă φ, $\psi\in F$, atunci

$$\vdash \varphi\to(\rceil\psi\to\rceil(\varphi\to\psi)).$$

6.16. Să se demonstreze că dacă $\varphi, \psi \in F$, atunci

$$\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi).$$

6.17. Să se demonstreze că dacă $\varphi, \psi \in F$, atunci

$$\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi).$$

6.18. Să se demonstreze că dacă $\varphi, \psi, \chi \in F$, atunci

$$\vdash (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)).$$

6.19. Să se demonstreze că dacă $\varphi, \psi \in F$, atunci

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi.$$

6.20. Să se demonstreze că dacă $\varphi, \psi \in F$, atunci

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi.$$

6.21. Să se demonstreze că dacă $\varphi, \psi, \chi \in F$, atunci

$$\vdash (\chi \to \varphi) \to ((\chi \to \psi) \to (\chi \to \varphi \wedge \psi)).$$

6.22. Să se demonstreze că dacă $\varphi, \psi \in F$, atunci

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi.$$

6.23. Să se demonstreze că dacă $\varphi, \psi \in F$, atunci

$$\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi).$$

6.24. Să se demonstreze că dacă $\varphi, \psi, \chi \in F$, atunci

$$\vdash ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi).$$

6.25. Să se demonstreze că dacă φ, ψ, χ, $\theta \in F$, atunci

$$\vdash (\chi \to \theta) \to [(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \to \theta))].$$

6.26. Să se demonstreze că dacă φ, ψ, $\chi \in F$, atunci

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \wedge \psi \to \chi).$$

6.27. Să se demonstreze că dacă φ, ψ, $\chi \in F$, atunci

$$\vdash (\varphi \wedge \psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi)).$$

6.28. Să se demonstreze că dacă φ, ψ, $\chi \in F$, atunci

$$\vdash (\varphi \vee \psi) \to (\chi \to ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))).$$

6.29. Să se demonstreze că dacă φ, ψ, $\chi \in F$, atunci

$$\vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) \to ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)).$$

6.30. Să se demonstreze că dacă φ, $\psi \in F$, atunci

$$\vdash \varphi \wedge \rceil\varphi \to \psi \text{ şi } \vdash \psi \to \varphi \vee \rceil\varphi.$$

6.31. Fie $\Gamma \subseteq F$ şi $\varphi \in F$. Să se demonstreze că $\Gamma \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \Gamma$ a.î.

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \to \varphi.$$

6.32. Să se demonstreze că pentru o mulţime nevidă $\Sigma \subseteq F$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Dacă $\varphi \in F$ şi $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\varphi \in \Sigma$;

(ii) Σ conţine toate formulele demonstrabile şi dacă α, $\beta \in F$ a.î. α, $\alpha \to \beta \in \Sigma$, atunci $\beta \in \Sigma$.

Observație. O mulțime nevidă Σ de formule ce verifică una din cele două condiții echivalente de mai înainte se numeşte *sistem deductiv*.

6.33. Să se demonstreze că pentru orice $\varphi, \psi \in F$, $\vdash \varphi$ şi $\vdash \psi$ dacă şi numai dacă $\vdash \varphi \wedge \psi$.

6.34. Să se demonstreze că relația $\leq$ definită pe F prin

$$\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

este o relație de preordine pe F.

6.35. Să se demonstreze că relația $\equiv$ definită pe F prin

$$\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ şi } \vdash \psi \rightarrow \varphi$$

este o echivalență pe F.

6.36. Să se demonstreze că relația definită pe $F/\equiv$ prin

$$\hat{\varphi} \leq \hat{\psi} \Leftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

este o relație de ordine pe $F/\equiv$ (unde prin $\hat{\varphi}$ am notat clasa de echivalență a lui φ relativă la $\equiv$), ce conferă lui $F/\equiv$ structură de latice Boole.

Observație. Algebra Boole $(F/\equiv, \wedge, \vee, \rceil, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ corespunzătoare laticei Boole $(F/\equiv, \leq)$ poartă numele de *algebra Lindenbaum-Tarski a calculului cu propoziții*.

6.37. Să se demonstreze că dacă notăm prin $p : F \rightarrow F/\equiv$ surjecția canonică, $p(\varphi) = \hat{\varphi}$ pentru orice $\varphi \in F$, atunci pentru orice φ, ψ avem:

(i) $\vdash \varphi$ dacă şi numai dacă $p(\varphi)=\mathbf{1}$;

(ii) $p(\varphi \wedge \psi) = p(\varphi) \wedge p(\psi)$;

(iii) $p(\varphi \vee \psi) = p(\varphi) \vee p(\psi)$;

(iv) $p(\rceil\varphi) = \rceil p(\varphi)$;

(v) $p(\varphi \to \psi) = p(\varphi) \to p(\psi)$;

(vi) $p(\varphi \leftrightarrow \psi) = p(\varphi) \leftrightarrow p(\psi)$.

Observație. (i) ne oferă o metodă algebrică de verificare dacă o formulă este demonstrabilă iar egalitățile (ii) - (vi) ne arată felul în care conectorii logici sunt convertiți în operații booleene.

6.38. Utilizând (i) de la problema precedentă să se demonstreze că pentru oricare formule $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ avem:

$$\vdash [\alpha \to (\beta \to \delta)] \to [(\alpha \to (\gamma \to \delta)) \to (\alpha \to (\beta \to \delta))].$$

6.39. Să se demonstreze că pentru orice funcție $f : V \to L_2$ există o unică funcție $\tilde{f} : F \to L_2$ ce satisface următoarele proprietăți:

(i) $\tilde{f}(v) = f(v)$, pentru orice $v \in V$;

(ii) $\tilde{f}(\rceil\varphi) = \rceil \tilde{f}(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in F$;

(iii) $\tilde{f}(\varphi \to \psi) = \tilde{f}(\varphi) \to \tilde{f}(\psi)$, pentru orice $\varphi, \psi \in F$.

Observație. O funcție $f : V \to L_2$ se zice o *interpretare* pentru sistemul formal L al calculului cu propoziții.

6.40. Fie $f : V \to L_2$ iar $\tilde{f} : F \to L_2$ funcția a cărei existență este asigurată de problema **6.39.**.

Să se demonstreze că pentru oricare două formule $\varphi, \psi \in F$ avem:

(iv) $\tilde{f}(\varphi \vee \psi) = \tilde{f}(\varphi) \vee \tilde{f}(\psi)$;

(v) $\tilde{f}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{f}(\varphi) \wedge \tilde{f}(\psi)$;

(vi) $\tilde{f}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{f}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{f}(\psi)$.

6.41. Să se demonstreze că dacă $f : V \to L_2$ este o interpretare pentru L, atunci există un unic morfism de algebre Boole $\bar{f} : F/\equiv \to L_2$ ce face comutativă următoarea diagramă:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & F/\equiv \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ & L_2 & \end{tikzcd}$$

(p fiind surjecția canonică definită prin $p(\varphi) = \hat{\varphi}$ pentru orice $\varphi \in F$).

Observație. Dacă $f : V \to L_2$ este o interpretare pentru L şi $\varphi \in F$, vom spune că φ este *adevărată pentru f* dacă $\tilde{f}(\varphi) = 1$ şi vom scrie în acest caz că $f \vDash \varphi$. Dacă $\tilde{f}(\varphi) = 0$ vom spune că φ este *falsă pentru f* şi vom scrie non $(f \vDash \varphi)$.

Vom spune despre $\varphi \in F$ că este o *tautologie* dacă $f \vDash \varphi$ pentru orice interpretare $f : V \to L_2$. Vom nota prin *Taut* mulțimea tautologiilor (reamintim că prin *Prov* am notat mulțimea formulelor demonstrabile ale lui L).

6.42. Să se demonstreze că

$$Prov \subseteq Taut.$$

6.43. Fie $f : F/\equiv \to L_2$ un morfism de algebre Boole.

Definim $g_f : V \to L_2$ prin $g_f(v) = f(\hat{v})$ pentru orice $v \in V$. Să se arate că g_f este o interpretare a lui L a.î. pentru orice formulă $\varphi \in F$ avem $\tilde{g}_f(\varphi) = f(\hat{\varphi})$.

6.44. Să se demonstreze că $Taut \subseteq Prov$.

Observație. Din problemele **6.42.** şi **6.44.** deducem egalitatea:

$$Taut = Prov,$$

rezultat cunoscut sub numele de *teorema de completitudine* a calculului cu propoziții.

§7. Calculul cu predicate

1.Limbajul asociat unei clase de structuri

O *structura de ordinul I* (sau *de prim ordin)* este de forma:

$\overline{A}$ = <A, $\{f_i\}_{i\in I}$, $\{R_j\}_{j\in J}$, $\{c_k\}_{k\in K}$> unde:

- A este o mulţime nevidă numită *universul structurii* $\overline{A}$,
- $F_i : A^{n_i} \to A$ este o operaţie n_i –ară ($n_i \geq 1$) pentru orice $i\in I$,
- $R_j \subseteq A^{m_j}$ este o relaţie m_j- ară ($m_j \geq 1$) pentru orice $j\in J$,
- $c_k \in A$ este o constantă pentru orice $k\in K$.

Spunem că $\overline{A}$ este de *tipul* τ = < $\{n_i\}_{i\in I}$, $\{m_j\}_{j\in J}$, $\{0\}_{k\in K}$>.

Pentru clasa structurilor de un tip fixat τ vom defini un *limbaj de ordin I cu egalitate* sau de *prim ordin cu egalitate* L_τ (numit şi *calculul cu predicate*) după cum urmează:

Alfabetul lui L_τ este format din următoarele simboluri primitive:

(1) o mulţime infinită de *variabile* u,v,w,x,y,z,…(eventual indexate),

(2) *simboluri de operaţii*: f_i, pentru orice $i\in I$ (lui f_i îi este ataşat $n_i \geq 1$ numit *ordinul* lui f_i),

(3) *simboluri de relaţii (predicate)*: R_j, pentru orice $j\in J$ (lui R_j îi este ataşat $m_j \geq 1$ numit *ordinul* lui R_j),

(4) *simboluri de constante* : c_k, pentru orice $k\in K$,

(5) *simbolul de egalitate* : = ,

(6) *conectorii* : $\rceil$, →,

(7) *cuantificatorul universal* : ∀,

(8) *simboluri de punctuaţie*: (,), [,] (parantezele).

Mulţimea *termenilor* lui L_τ se defineşte prin inducţie:

(i) variabilele şi simbolurile de constante sunt termeni,

(ii) dacă f este un simbol de operaţie de ordin n (n – ară) şi $t_1,\ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1,\ldots,t_n)$ este termen.

Observaţie. Pentru simplificare, vom spune:

- *operații* în loc de simboluri de operații,
- *relații (predicate)* în loc de simboluri de relații (predicate),
- *constante* în loc de simboluri de constante.

Formulele atomice ale lui L_τ sunt definite astfel:

(i) dacă t_1, t_2 sunt termeni, atunci $t_1 = t_2$ este formulă atomică,

(ii) dacă R este un predicat de ordin n, atunci $R(t_1,\dots,t_n)$ este formulă atomică pentru orice termeni $t_1,\dots,t_n$.

Formulele lui L_τ sunt definite prin inducție:

(i) formulele atomice sunt formule,

(ii) dacă φ este formulă, atunci $\rceil\varphi$ este formulă ,

(iii) dacă φ, ψ sunt formule, atunci $\varphi\to\psi$ este formulă,

(iv) dacă φ este formulă, atunci $\forall x\ \varphi$ este formulă, x fiind variabilă.

Analog ca în cazul calculului cu propoziții introducem abrevierile $\vee$ (*disjuncția*), $\wedge$ (*conjuncția*) şi $\leftrightarrow$ (*echivalența logică*) astfel:

$\varphi \vee \psi = \rceil\varphi \to \psi$

$\varphi \wedge \psi = \rceil(\varphi \to \rceil\varphi)$

$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, pentru orice formule φ,ψ.

De asemenea, se introduce *cuantificatorul existențial* $\exists$ prin:

$\exists\, x\ \varphi = \rceil\, \forall\, x\ \rceil\varphi$, cu φ formulă iar x variabilă.

Vom defini prin inducție:

FV(t) = mulțimea *variabilelor libere ale termenului t* şi

FV(φ) = mulțimea *variabilelor libere ale formulei φ* astfel:

(i) FV(t) este introdusă astfel:

- dacă t este variabila x, atunci FV(t) = {x},
- dacă t este constanta c, atunci FV(t) = $\varnothing$,
- dacă $t = f(t_1,\dots,t_n)$ (cu f operație n – ară iar $t_1, \dots,t_n$ variabile sau constante), atunci $FV(t) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$.

(ii) FV(φ) este introdusă astfel:

- dacă φ este de tipul $t_1 = t_2$, atunci:

$FV(\varphi) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$,

- dacă φ este de tipul $R(t_1,\ldots,t_n)$ cu R predicat n – ar iar $t_1, \ldots, t_n$ variabile sau constante, atunci $FV(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$,
- dacă $\varphi = \urcorner\psi$, atunci $FV(\varphi) = FV(\psi)$,
- dacă $\varphi = \psi \to \theta$, atunci $FV(\varphi) = FV(\psi) \cup FV(\theta)$,
- dacă $\varphi = \forall\, x\, \psi$, atunci $FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{\psi\}$.

Consecințe imediate:

- dacă $\varphi = \psi \wedge \theta, \psi \vee \theta, \psi \leftrightarrow \theta$ atunci

  $FV(\varphi) = FV(\psi) \cup FV(\theta)$,
- dacă $\varphi = \exists\, x\, \psi$, atunci $FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{\psi\}$.

Dacă $x \in FV(\varphi)$, atunci x se va numi *variabilă liberă* a lui φ iar în caz contrar *variabilă legată.*

O formulă fără variabile libere se numeşte *enunț.*

În cele ce urmează vom nota prin:

- V_τ- mulțimea variabilelor lui L_τ,
- F_τ - mulțimea formulelor lui L_τ,
- E_τ - mulțimea enunțurilor lui L_τ.

Dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$ atunci vom scrie $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$.

Dacă $\varphi \in F$, $x \in V$ şi avem $\varphi(x)$ definit, atunci pentru un termen t definim ce este $\varphi(t)$:

- dacă y este variabilă liberă în t, atunci se înlocuieşte y cu o variabilă v ce nu apare în $\varphi(x)$ sau în t, în toate locurile unde y este legată în φ,
- se înlocuieşte apoi x cu t.

Exemplu:

Fie L limbajul laticilor, $\varphi(x) := \exists\, y\, (x = y)$ şi $t := y \vee z$. Atunci:

- $\exists\, x\, (x = y) \rightsquigarrow \exists\, v\, (x = v)$
- $\varphi(t)$ va fi $\exists\, v\, (x \vee z = v)$.

Reamintim *axiomele calculului cu predicate*:

B_0: Axiomele $A_1 - A_3$ ale calculului propozițional,

B_1: $\forall\, x\, (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall\, x\, \psi)$, dacă $x \notin FV(\varphi)$,

B_2: $\forall x\ \varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$ (t termen),
B_3: $x = x$,
B_4: $x = y \rightarrow (t(v_1,\ldots,x,\ldots,v_n) = t(v_1,\ldots,y,\ldots,v_n))$,
B_5: $x = y \rightarrow (\varphi(v_1,\ldots,x,\ldots,v_n) \rightarrow \varphi(v_1,\ldots,y,\ldots,v_n))$.

Calculul cu predicate are două reguli de deducție:

- *modus ponens* (m.p.): $\frac{\alpha,\alpha\rightarrow\beta}{\beta}$,
- *generalizarea* (G) : $\frac{\varphi}{\forall x\varphi}$.

Teoremele formale ale lui L_τ se definesc prin inducție:

- axiomele sunt teoreme formale,
- dacă α, $\alpha\rightarrow\beta$ sunt teoreme, atunci β este teoremă (m.p.),
- dacă φ este teoremă, atunci $\forall\ x\ \varphi$ este teoremă (G).

Notație. Dacă φ este teoremă formală, vom scrie lucrul acesta prin $\vdash \varphi$.

Observație. Teoremele formale ale calculului cu propoziții rămân teoreme formale şi ale calculului cu predicate.

2.Interpretări ale calculului cu predicate

Fie $\overline{A}$ o structură corespunzătoare limbajului L_τ. Dacă f (respectiv R, respectiv c) este un simbol de operație (respectiv simbol de relație, respectiv simbol de constantă) vom nota cu $f^{\overline{A}}$ (respectiv $R^{\overline{A}}$, respectiv $c^{\overline{A}}$) operația (respectiv relația, respectiv constanta) corespunzătoare din $\overline{A}$.

O *interpretare* a lui L_τ în $\overline{A}$ este o funcție $s : V_\tau \rightarrow A$.

Pentru orice termen t şi pentru orice interpretare s definim prin inducție $t^{\overline{A}}(s)\in A$ astfel:

- dacă t este o variabilă v, atunci $t^{\overline{A}}(s) = s(v)$,
- dacă t este o constantă c, atunci $t^{\overline{A}}(s) = c^{\overline{A}}$,
- dacă $t = f(t_1,\ldots,t_n)$, atunci $t^{\overline{A}}(s) = f^{\overline{A}}(t_1^{\overline{A}}(s),\ldots, t_n^{\overline{A}}(s))$.

Pentru orice formulă φ şi pentru orice interpretare s definim prin inducție:

$\| \varphi(s)\| = \| \varphi(s)\|_{\bar{A}} \in L_2 = \{0,1\}$, astfel:

(i) *pentru formulele atomice*:

- dacă φ este $t_1 = t_2$ atunci:

$$\| \varphi(s)\| = \begin{cases} 1, \text{dacă } \ t_1^{\bar{A}}(s) = t_2^{\bar{A}}(s) \\ 0, \text{dacă } \ t_1^{\bar{A}}(s) \neq t_2^{\bar{A}}(s) \end{cases}$$

- dacă φ este $R(t_1,\ldots,t_n)$ atunci:

$$\| \varphi(s)\| = 1 \Leftrightarrow (t_1^{\bar{A}}(s),\ldots, t_n^{\bar{A}}(s)) \in R^{\bar{A}}.$$

(ii) *pentru formulele oarecare*:

- pentru formulele atomice a fost definit,
- dacă $\varphi = \rceil \psi$, atunci $\| \varphi(s)\| = \rceil \| \psi(s)\|$,
- dacă $\varphi = \alpha \to \beta$, atunci

$$\| \varphi(s)\| = \| \alpha(s)\| \to \| \beta(s)\|,$$

- dacă φ este $\forall x \psi$, atunci

$$\| \varphi(s)\| = \bigwedge_{a\in A} \| \psi(s\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix})\| \text{ unde } s\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix} : V_\tau \to L_2$$

este o interpretare definită de $s\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix}(v) = \begin{cases} a, \text{dacă } \ v = x \\ s(v), \text{dacă } \ v \neq x \end{cases}$.

Consecințe imediate:

- dacă $\varphi = \alpha \vee \beta$: $\| \varphi(s)\| = \| \alpha(s)\| \vee \| \beta(s)\|$,
- dacă $\varphi = \alpha \wedge \beta$: $\| \varphi(s)\| = \| \alpha(s)\| \wedge \| \beta(s)\|$,
- dacă $\varphi = \alpha \leftrightarrow \beta$: $\| \varphi(s)\| = \| \alpha(s)\| \leftrightarrow \| \beta(s)\|$,
- dacă $\varphi = \exists x \psi$: $\| \varphi(s)\| = \bigvee_{a\in A} \| \psi(s\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix})\|$.

Observație. Fie $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, $a_1,\ldots,a_n \in A$, iar $t(x_1,\ldots,x_n)$ un termen.

Definim: $t^{\bar{A}}(a_1,..,a_n) = t^{\bar{A}}(s) \in A$,

$\| \varphi(a_1,\ldots,a_n) \| = \| \varphi(s) \| \in L_2$,

unde $s : V_\tau \to A$ este o interpretare a.î. $s(x_i) = a_i$, $i=1,..,n$. Problemele **7.13.** și **7.14.** ne arată că definiția lui $t^{\bar{A}}(a_1,..,a_n)$ și $\| \varphi(a_1,\ldots,a_n) \|$ este corectă.

Notăm $\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] \Leftrightarrow \| \varphi(a_1,\ldots,a_n) \| = 1$.

Cu această notație, transcriem unele din proprietățile din definiția lui $\| \ \|$:

- dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $t_1(x_1,\ldots,x_n) = t_2(x_1,\ldots,x_n)$, atunci
$\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] \Leftrightarrow t_1^{\overline{A}}(a_1,\ldots,a_n) = t_2^{\overline{A}}(a_1,\ldots,a_n)$,
- dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $R(t_1(x_1,..,x_n),..,t_m(x_1,..,x_n))$, atunci
$\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] \Leftrightarrow (t_1^{\overline{A}}(a_1,\ldots,a_n),\ldots, t_m^{\overline{A}}(a_1,\ldots,a_n)) \in R^{\overline{A}}$,
- dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\rceil\psi(x_1,\ldots,x_n)$, atunci
$\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] \Leftrightarrow \overline{A} \nvDash \psi[a_1,\ldots,a_n]$,
- dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\alpha(x_1,\ldots,x_n)\vee\beta(x_1,\ldots,x_n)$, atunci
$\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] \Leftrightarrow \overline{A} \vDash \alpha[a_1,\ldots,a_n]$ sau $\overline{A} \vDash \beta[a_1,\ldots,a_n]$,
- dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\alpha(x_1,\ldots,x_n)\wedge\beta(x_1,\ldots,x_n)$, atunci
$\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] \Leftrightarrow \overline{A} \vDash \alpha[a_1,\ldots,a_n]$ şi $\overline{A} \vDash \beta[a_1,\ldots,a_n]$,
- dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\alpha(x_1,\ldots,x_n)\rightarrow \beta(x_1,\ldots,x_n)$, atunci
$\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] \Leftrightarrow (\overline{A} \vDash \alpha[a_1,\ldots,a_n] \Rightarrow \overline{A} \vDash \beta[a_1,\ldots,a_n])$,
- dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\forall x\ \psi(x, x_1,\ldots,x_n)$ atunci
$\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] \Leftrightarrow$ pentru orice $a\in A$, $\overline{A} \vDash \psi[a, a_1,\ldots,a_n]$,
- dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\exists x\ \psi(x, x_1,\ldots,x_n)$ atunci
$\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n] \Leftrightarrow$ există $a\in A$, $\overline{A} \vDash \psi[a, a_1,\ldots,a_n]$.

Observație. Dacă φ este un enunț, atunci $\|\varphi(s)\|$ nu depinde de interpretarea s şi notăm $\| \varphi \| = \|\varphi(s)\|$. Astfel:

$$\overline{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \|\varphi\| = 1.$$

Spunem în acest caz că φ este *adevărat* în $\overline{A}$ sau că $\overline{A}$ este *model* al lui φ. Dacă Γ este o mulțime de enunțuri, atunci spunem că $\overline{A}$ este *model al lui Γ* dacă $\overline{A} \vDash \varphi$ pentru orice $\varphi\in\Gamma$ (notăm $\overline{A} \vDash\Gamma$).

Fie C o mulțime de constante noi (distincte de constantele lui L_τ). Considerăm limbajul $L_\tau(C)$ obținut din L_τ prin adăugarea constantelor din C. O structură corespunzătoare lui $L_\tau(C)$ va fi de forma $(\overline{A}, a_c)_{c\in C}$ cu $a_c\in A$ pentru orice $c\in C$ (a_c este interpretarea constantei $c\in C$). Dacă $C = \{c_1,\ldots,c_n\}$ atunci o structură pentru

$L_\tau(c_1,\ldots,c_n)$ va fi de forma ($\overline{A}$, $a_1,\ldots,a_n$), cu a_i interpretarea lui c_i, $i=1,\ldots,n$.

3. Probleme propuse.

7.1. Să se demonstreze că pentru orice formulă $\varphi \in F_\tau$ avem:

$\vdash \forall x \forall y\, \varphi(x,y) \to \forall y \forall x\, \varphi(x,y)$.

7.2. Să se demonstreze că pentru oricare formule $\varphi, \psi \in F_\tau$ avem:

$\vdash \forall x\, (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\, \varphi(x) \to \forall x\, \psi(x))$.

7.3. Să se demonstreze că pentru orice formulă $\varphi \in F_\tau$ avem:

$\vdash \forall x\ \varphi \leftrightarrow\ \rceil \exists x \rceil\varphi$.

7.4. Să se demonstreze că pentru oricare formule $\varphi, \psi \in F_\tau$ avem:

$\vdash \forall x\, (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\, \varphi \leftrightarrow \forall x\, \psi)$.

7.5. Să se demonstreze că pentru oricare formule $\varphi, \psi \in F_\tau$ avem:

$\vdash (\varphi \to \forall x\, \psi) \to \forall x\, (\varphi \to \psi)$, dacă $x \notin FV(\varphi)$.

7.6. Să se demonstreze că pentru oricare formule $\varphi, \psi \in F_\tau$ avem:

$\vdash \forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi(x) \to \psi)$, dacă $x \notin FV(\psi)$.

7.7. Să se demonstreze că pentru oricare formule $\varphi, \psi \in F_\tau$ avem:

$\vdash \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x))$.

7.8. Să se demonstreze că :

(i) $\vdash x = y \to y = x$;

(ii) $\vdash (x = y) \wedge (y = z) \to x = z$;

(iii) $\vdash x = y \to (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y))$, pentru orice $\varphi \in F_\tau$.

Observaţie. Deducţia din ipoteze Σ, notată $\Sigma \vdash \varphi$ (Σ mulţime de formule, φ formulă) se introduce recursiv:

1) φ axiomă,
2) $\varphi \in \Sigma$,
3) există ψ a.î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$,
   (scriem schematic: $\frac{\Sigma \vdash \psi, \psi \to \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$ m.p.)
4) există ψ a.î. $\Sigma \vdash \psi$ şi $\varphi = \forall x\, \psi$
   (scriem schematic: $\frac{\Sigma \vdash \psi}{\Sigma \vdash \forall x \psi}$ (G)).

7.9. (*Teorema deducţiei*). Să se demonstreze că pentru orice mulţime de formule $\Sigma \subseteq F_\tau$ avem:

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \psi,$$

pentru oricare $\psi \in F_\tau$ iar φ enunţ.

7.10. Să se demonstreze ca relaţia ≡ definită pe F_τ prin:

$$\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \psi \text{ şi } \vdash \psi \to \varphi$$

este o echivalenţă pe F_τ.

7.11. Să se demonstreze că relaţia definită pe $F_\tau/\equiv$ prin:

$$\hat{\varphi} \leq \hat{\psi} \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \psi$$

este o relaţie de ordine pe $F_\tau/\equiv$ ce conferă lui $F_\tau/\equiv$ structură de latice Boole (unde prin $\hat{\varphi}$ am notat clasa de echivalenţă a lui φ relativă la ≡).

Observaţie. Algebra Boole ($F_\tau/\equiv$, ∧, ∨, ⌉, **0**, **1**) corespunzătoare laticei Boole ($F_\tau/\equiv$, ≤) poartă numele de *algebra*

Lindenbaum – Tarski a limbajului L_τ (sau a calculului cu predicate).

7.12. Să se demonstreze că dacă $\varphi \in F_\tau$, atunci în algebra Boole $F_\tau/\equiv$ avem:

$$\widehat{\forall x\, \varphi(x)} = \bigwedge_{v \in V_\tau} \widehat{\varphi(v)} \text{ iar}$$

$$\widehat{\exists x\, \varphi(x)} = \bigvee_{v \in V_\tau} \widehat{\varphi(v)}.$$

7.13. Pentru orice interpretări $s_1, s_2 \colon V_\tau \to A$ şi pentru orice termen t avem :

$$s_{1|FV(t)} = s_{2|FV(t)} \Rightarrow t^{\bar{A}}(s_1) = t^{\bar{A}}(s_2).$$

7.14. Să se arate că dacă pentru orice formulă $\varphi \in F_\tau$ şi pentru orice interpretări s_1, s_2 avem:

$s_{1|FV(\varphi)} = s_{2|FV(\varphi)}$, atunci $||\varphi(s_1)|| = ||\varphi(s_2||$.

7.15. Să se demonstreze că pentru orice termen $t(x_1,\ldots,x_n)$ al lui L_τ şi pentru orice $a_1,\ldots,a_n \in A$ avem:

$$t(c_1,\ldots,c_n)^{(\bar{A}, a_1,\ldots,a_n)} = t^{\bar{A}}(a_1,\ldots,a_n).$$

7.16. Să se demonstreze că pentru orice formulă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ al lui L_τ şi pentru orice $a_1,\ldots,a_n \in A$ avem:

$$(\bar{A}, a_1,\ldots,a_n) \vDash \varphi(c_1,\ldots,c_n) \Leftrightarrow \bar{A} \vDash \varphi[a_1,\ldots,a_n].$$

Dacă L_τ este un limbaj de ordin I (cu egalitate), F_τ mulţimea formulelor sale şi E_τ mulţimea enunţurilor sale, atunci cardinalul lui L_τ este $|L_\tau| = |F_\tau| = |E_\tau|$.

Fie C o mulţime de constante noi şi $L_\tau(C)$ limbajul extins prin adăugarea constantelor din C.

Observaţie. Dacă $|L_\tau| = |C|$, atunci $|L_\tau(C)| = |L_\tau|$.

7.17. Fie $\varphi(c)\in L_\tau(C)$ cu $\varphi(x)\in F$ şi $c\in C$. Dacă T este o teorie în L_τ atunci $T\vdash\varphi(c)$ în $L_\tau(C)$ dacă si numai dacă $T\vdash\forall x\,\varphi(x)$ în L_τ.

7.18. Dacă T este o teorie în L_τ atunci T consistentă în L_τ implică T consistentă în $L_\tau(C)$ (reamintim că o mulțime Σ de formule se zice inconsistentă dacă $\Sigma\vdash\varphi$ pentru orice $\varphi\in F_\tau$ şi consistentă dacă nu este inconsistentă).

Observație. Vom considera în continuare numai teorii închise (formate numai din enunțuri).

Definiție. Fie T o teorie consistentă în $L_\tau(C)$. Atunci T se numeşte *teorie Henkin* dacă pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui $L_\tau(C)$ cu cel mult o variabilă liberă x există $c\in C$ a.î. $T\vdash\exists x\,\varphi(x)\to\varphi(c)$.

Observație. Implicația $T\vdash\varphi(c)\to\exists x\,\varphi(x)$ are loc întotdeauna.

7.19. Fie L_τ şi C a.î. $|L_\tau| = |C|$. Dacă T este o teorie consistentă în L_τ, atunci există o teorie Henkin $\overline{T}$ în $L_\tau(C)$ cu $T\subseteq\overline{T}$.

7.20. Să se arate că dacă T este teorie Henkin şi $T\subseteq T'$ este consistentă, atunci T' este teorie Henkin.

7.21. Să se arate că dacă T este o teorie consistentă a lui L_τ, atunci există o structură $\overline{A}$ a.î. $\overline{A}\vDash T$ şi $|\overline{A}|\le|L_\tau|$.

Definiție. Fie Σ o mulțime de enunțuri ale lui L_τ. Definim *deducția semantică* $\Sigma\vDash\varphi$ prin:

$$\overline{A}\vDash\Sigma\Rightarrow\overline{A}\vDash\varphi\ (\ \varphi\ \text{enunț}).$$

7.22. (*Teorema de completitudine extinsă*). Să se arate că dacă T este o mulțime de enunțuri şi φ este un enunț din L_τ, atunci:

$$T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vDash \varphi.$$

7.23. *(Teorema de completitudine a lui L_τ)*. Pentru orice enunț φ al lui L_τ avem:

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \vDash \varphi.$$

7.24. *(Teorema Löwenheim-Skolem)*. Fie T o mulțime de enunțuri într-un limbaj numărabil L_τ. Dacă T are un model, atunci T are un model cel mult numărabil.

7.25. (*Teorema de compacitate*). O teorie T admite un model dacă şi numai dacă orice parte finită a sa admite un model.

B:SOLUȚII

§1. Mulțimi, funcții, relații binare.

1.1. Fie $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ cu p, $q\in\mathbb{Z}$, $q\neq0$ (putem presupune că p şi q nu sunt simultan pare).

Atunci $ax^2+bx+c=\frac{ap^2+bpq+cq^2}{q^2}$. Cum în fiecare din cazurile (p, q impare) sau (p par, q impar) şi (p impar, q par) numărul $ap^2+bpq+cq^2$ este impar (căci prin ipoteză a, b, c sunt impare) deducem că $ax^2+bx+c\neq0$ pentru orice $x\in\mathbb{Q}$, de unde concluzia.

1.2. Presupunem prin absurd că există $r_i=\frac{p_i}{q_i}\in\mathbb{Q}$, $1\leq i\leq n$ a.î. orice $x\in\mathbb{Q}$ să se scrie sub forma $x = x_1r_1+\ldots+ x_nr_n$ cu $x_i\in\mathbb{Z}$, $1\leq i\leq n$ (evident p_i , $q_i\in\mathbb{Z}$ şi $q_i\neq0$, $1\leq i\leq n$).

În mod evident nu este posibil ca pentru orice $1\leq i\leq n$, $r_i\in\mathbb{Z}$ (căci atunci putem alege $x\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ şi nu vor exista $x_1, \ldots, x_n\in\mathbb{Z}$ a.î. $x=x_1r_1+\ldots+ x_nr_n$).

Astfel, scriind $r_i=\frac{p_i}{q_i}$ cu $(p_i , q_i)=1$ există indici i a.î. $1\leq i\leq n$ şi $q_i\neq\pm1$.

Să alegem $q\in\mathbb{Z}$ a.î. $q\nmid q_1\ldots q_n$. Alegând $x=\frac{1}{q}$ ar trebui să existe $x_1, \ldots , x_n\in\mathbb{Z}$ a.î. $\frac{1}{q}=x_1r_1+\ldots+x_nr_n \Leftrightarrow \frac{1}{q}=\frac{\alpha}{q_1\ldots q_n}$ (cu $\alpha\in\mathbb{Z}^*$) $\Leftrightarrow q_1\cdot\ldots\cdot q_n=\alpha\cdot q$, de unde ar trebui ca $q \mid q_1\ldots q_n$ -absurd.

1.3. Să arătăm la început că $[a, b]\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$.

Fie $m=\left[\frac{1}{b-a}\right]+1>\frac{1}{b-a}$; deci $m(b-a)>\frac{1}{b-a}(b-a)=1$, de unde mb-ma>1, adică mb>ma+1.

Deci mb≥[mb]>ma; notând [mb] =k avem $\frac{k}{m}\in[a, b]\cap\mathbb{Q}$.

Să demonstrăm acum că şi [a, b]$\cap$**I**$\neq\varnothing$. Pentru aceasta fie r$\in$(a, b)$\cap\mathbb{Q}$ şi s$\in$(r,b)$\cap\mathbb{Q}$. Atunci (r, s)$\subset$(a, b) cu r, s $\in\mathbb{Q}$ şi pentru orice m, n $\in\mathbb{Z}^*$avem $\frac{m}{n}\sqrt{2}\in$**I**. Dacă $\frac{p}{q}\in(0, s\text{-}r)\cap\mathbb{Q}$ atunci $0<\frac{p}{2q}\sqrt{2}<s-r$ şi $\frac{p}{2q}\sqrt{2}\in$**I**. Cum r$\in\mathbb{Q}$, $r+\frac{p}{2q}\sqrt{2}\in$(r, s)$\cap$**I** şi cum (r, s)$\subset$(a, b) deducem că $r+\frac{p}{2q}\sqrt{2}\in$(a, b)$\cap$**I**, adică (a, b)$\cap$**I**$\neq\varnothing$.

1.4. $\Delta=(2k-1)^2-4k(k-2)=4k^2-4k+1-4k^2+8k=4k+1$. Pentru ca rădăcinile $x_{1,\ 2}=\frac{1-2k\pm\sqrt{4k+1}}{2k}\in\mathbb{Q}$ trebuie ca $4k+1=n^2$, cu n$\in\mathbb{Z}$.

Scriind că n = 2p+1 cu p$\in\mathbb{Z}$ obținem că $4k+1=$ $=(2p+1)^2=4p^2+4p+1$, de unde $k=p^2+p$ cu p$\in\mathbb{Z}$.

1.5. Dacă $x=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$, atunci $x-\sqrt{a}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$, de unde $x^2-2x\sqrt{a}+a=b+c+2\sqrt{bc}$ egalitate pe care o scriem sub forma $\alpha-2x\sqrt{a}=2\sqrt{bc}$ (cu $\alpha=x^2+a-b-c\in\mathbb{Q}$). Ridicând din nou la pătrat deducem că $\alpha^2+4ax^2-4\alpha\cdot x\sqrt{a}=4bc$.

Dacă $\alpha\cdot x\neq 0$, atunci în mod evident $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$.
Dacă $\alpha\cdot x=0$, atunci $\alpha=0$ sau x=0;
Dacă x=0 atunci $\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}=0\in\mathbb{Q}$.
Dacă $\alpha=0$, atunci $x^2=-a+b+c$ sau

$$a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}=-a+b+c$$

$\Leftrightarrow 2a+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}=0$, de unde a = ab = bc = ac = 0.

Dacă b=0, (cum a=0) deducem că $x=\sqrt{c}\in\mathbb{Q}$.

Dacă c=0 atunci $\sqrt{c}=0\in\mathbb{Q}$.

În toate cazurile am ajuns la concluzia că $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Notând din nou $y=\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ deducem că $y-\sqrt{a}=\sqrt{b}$ deci $y^2-2y\sqrt{a}+a=b$, de unde $2y\sqrt{a}=y^2+a-b$.

Dacă $y\neq 0$ atunci din nou $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ şi deducem imediat că şi $\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ pe când dacă y=0, atunci $\sqrt{a}=\sqrt{b}=0\in\mathbb{Q}$.

Observație. Procedând inductiv după n deducem că dacă $a_1, \ldots, a_n$, $\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_n}\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\ldots,\sqrt{a_n}\in\mathbb{Q}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

1.6. Dacă q = 0 sau $\sqrt{r}\in\mathbb{Q}$ concluzia este clară.

Să presupunem că $q\neq 0$ şi $\sqrt{r}\notin\mathbb{Q}$. Dacă prin absurd $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}$ atunci $2=p^3+3q^2pr+\sqrt{r}\left(3qp^2+q^3r\right)$, de unde $p^3+3q^2pr=2$ şi $3qp^2+q^3r=0$. Din $3qp^2+q^3r=0 \Rightarrow q(3p^2+q^2r)=0$ şi cum $q\neq 0$ deducem că $3p^2+q^2r=0$, adică p = r = 0 şi atunci obținem contradicțiile: 0 = 2 şi $\sqrt{r}\in\mathbb{Q}$.

1.7. Avem de găsit soluțiile $(a, b)\in\mathbb{Q}^2$ pentru care $5a^2-3a+16=b^2$. Observăm că o soluție particulară este (0, 4). Fie $a=a_1$ şi $b=b_1+4$. Înlocuind obținem că $5a_1^2-b_1^2-3a_1-8b_1=0$. Pentru $(a_1, b_1)\neq(0, 0)$ avem $\frac{b_1}{a_1}=\frac{m}{n}$ cu (m, n)=1. Înlocuind $b_1=\frac{m}{n}a_1$ obținem $a_1=\frac{3n^2+8mn}{5n^2-m^2}$ astfel că mulțimea cerută este:

$\{a \in \mathbb{Q} \mid a = \dfrac{3n^2 + 8mn}{5n^2 - m^2}$, m, n $\in \mathbb{Z}$, (m, n)=1 $\}$.

1.8. Scriem egalitatea $(\star)$ $a + b\cdot\sqrt[3]{p} + c\cdot\sqrt[3]{p^2} = 0$ sub forma $b\cdot\sqrt[3]{p} + c\cdot\sqrt[3]{p^2} = -a$. Înmulțind ambii membri ai lui $(\star)$ cu $\sqrt[3]{p}$ obținem $a\cdot\sqrt[3]{p} + b\cdot\sqrt[3]{p^2} = -cp$, de unde sistemul

$$(\star\,\star)\quad \begin{cases} b\cdot\sqrt[3]{p} + c\cdot\sqrt[3]{p^2} = -a \\ a\cdot\sqrt[3]{p} + b\cdot\sqrt[3]{p^2} = -cp \end{cases}$$

Înmulțind prima ecuație a lui $(\star\,\star)$ cu –b iar pe a doua cu c, prin adunare obținem $\sqrt[3]{p}\cdot\left(ac - b^2\right) = ab - c^2 p$, de unde $ac=b^2$ și $ab = c^2p$. Atunci $abc = c^3p$, adică $b^3 = c^3p$, de unde b = c = 0 (căci în caz contrar am deduce că $\sqrt[3]{p} = \dfrac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ - absurd). Rezultă imediat că și a = 0.

1.9. Până la n = 4 se demonstrează ușor prin reducere la absurd, ridicând de câteva ori la pătrat ambii membri (grupați în mod convenabil). În cazul general, vom face o demonstrație prin inducție după numărul factorilor primi diferiți p_1, p_2, …, p_r care divid pe cel puțin unul dintre numerele a_i. Este util să se demonstreze prin inducție o afirmație mai tare:

Există numere întregi c_1, d_1, ..., c_e, d_e, a.î. $d_i \neq 0$, $c_i \geq 1$, toți divizorii primi ai numerelor c_i fac parte dintre p_1, ...,p_r și produsul $\left(d_1\sqrt{c_1} + ... + d_e\sqrt{c_e}\right)\left(b_1\sqrt{a_1} + ... + b_n\sqrt{a_n}\right)$ este un număr întreg nenul.

Vom nota:

$$S = b_1\sqrt{a_1} + ... + b_n\sqrt{a_n} \text{ și } S' = d_1\sqrt{c_1} + ... + d_e\sqrt{c_e}.$$

Dacă r = 1, atunci S are forma $b_1\sqrt{p_1} + b_2\sqrt{1}$ și se poate lua $S' = b_1\sqrt{p_1} - b_2$, atunci $SS' = b_1^2 p_1 - b_2^2 \neq 0$.

Presupunem acum că $r \geq 2$ şi că afirmaţia noastră este adevărată pentru toate valorile mai mici decât r.

Vom nota prin $S_1, \ldots, S_8$ sume de forma $\beta_1\sqrt{\alpha_1}+\ldots+\beta_m\sqrt{\alpha_m}$, unde β_i sunt numere întregi, α_i sunt numere întregi pozitive libere de pătrate, cu divizorii primi cuprinşi între $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$($S_1, \ldots, S_8$ dacă nu se precizează contrariul, se pot egala cu 0).

Suma S poate fi scrisă sub forma $S = S_1 + S_2\sqrt{p_r}$, unde $S_2 \neq 0$. După presupunerea de inducţie există o astfel de sumă S_3 a.î. $f = S_3S_2$ este un număr întreg nenul. Produsul S_3S are forma $S_3S = S_3S_1 + f\sqrt{p_r} = S_4 + f\sqrt{p_r}$, cu $f \neq 0$. Rămâne de demonstrat că $S_5 = (S_3S_4 - f\cdot S_3\sqrt{p_r})S = S_4^2 - f^2p_r \neq 0$.

Dacă $S_4=0$, atunci este evident. Presupunem că $S_4 \neq 0$. Fie $S_4 = \beta_1\sqrt{\alpha_1}+\ldots+\beta_m\sqrt{\alpha_m}$; dacă m=1, atunci $S_4 = \beta_1\sqrt{\alpha_1}$. Atunci $S_4^2 - f^2p_r = \beta_1^2\alpha_1 - f^2p_r \neq 0$ (într-adevăr, $\beta_1^2\alpha_1$ se divide printr-o putere pară a lui p_r, iar f^2p_r printr-una impară).

Dacă m>1, atunci S_4 poate fi scrisă sub forma $S_4 = S_6 + S_7\sqrt{p}$, unde p este unul dintre numerele prime $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$, $S_6S_7 \neq 0$ şi numerele de sub semnul radicalului din sumele S_6S_7 nu se divid prin p. Atunci $S_5 = S_6^2 + S_7^2p - f^2p_r + 2S_6S_7\sqrt{p} \neq 0$ datorită ipotezei de inducţie, pentru că $2S_6S_7 \neq 0$.

Din nou din ipoteza de inducţie se găseşte un S_6 a.î. S_5S_6 este un număr nenul g. Vom lua $S' = S_8(S_3S_4 - f\cdot S_3\sqrt{p_r})$. Atunci $SS' = S_5S_8 = g$.

Observaţie. În particular, dacă b_i sunt numere raţionale oarecare şi a_i numere naturale diferite două câte două, mai mari decât 1 şi libere de pătrate (i = 1, 2, …, n ; n > 1), atunci numărul $b_1\sqrt{a_1}+\ldots+b_n\sqrt{a_n}$ este iraţional.

1.10. Din $\sqrt{7}-\frac{m}{n}>0$ deducem că $7n^2-m^2>0$, adică $7n^2-m^2\geq 1$.

Să arătăm de exemplu că egalitățile $7n^2-m^2=1$, 2 sunt imposibile.

Să presupunem prin absurd că egalitatea $7n^2-m^2=1$ este posibilă. Obținem că $7n^2=m^2+1$.

Însă dacă $m\equiv 0\ (7) \Rightarrow m^2+1\equiv 1\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 1\ (7) \Rightarrow m^2+1\equiv 2\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 2\ (7) \Rightarrow m^2+1\equiv 5\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 3\ (7) \Rightarrow m^2+1\equiv 3\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 4\ (7) \Rightarrow m^2+1\equiv 3\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 5\ (7) \Rightarrow m^2+1\equiv 5\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 6\ (7) \Rightarrow m^2+1\equiv 2\ (7)$, absurd.

Să presupunem că şi egalitatea $7n^2-m^2=2$ este posibilă, adică $7n^2=m^2+2$.

Dacă $m\equiv 0\ (7) \Rightarrow m^2+2\equiv 2\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 1\ (7) \Rightarrow m^2+2\equiv 3\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 2\ (7) \Rightarrow m^2+2\equiv 6\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 3\ (7) \Rightarrow m^2+2\equiv 4\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 4\ (7) \Rightarrow m^2+2\equiv 4\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 5\ (7) \Rightarrow m^2+2\equiv 6\ (7)$, absurd.

Dacă $m\equiv 6\ (7) \Rightarrow m^2+2\equiv 3\ (7)$, absurd.

În concluzie $7n^2-m^2\geq 3$, de unde $7\geq \frac{3+m^2}{n^2}$, adică $\sqrt{7}\geq \frac{\sqrt{3+m^2}}{n}$.

Este suficient să demonstrăm că:

$$\frac{\sqrt{3+m^2}}{n}>\frac{m}{n}+\frac{1}{mn}\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3+m^2}}{n}>\frac{m^2+1}{mn}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+m^2}>\frac{m^2+1}{m}\Leftrightarrow m^2\left(3+m^2\right)>\left(m^2+1\right)^2\Leftrightarrow$$

$m^4+3m^2 > m^4+2m^2+1 \Leftrightarrow m^2 > 1$, ceea ce este adevărat (deoarece dacă m=1, atunci ipoteza devine $\sqrt{7}-\frac{1}{n}>0$, $\forall$ $n\in\mathbb{N}^*$, iar concluzia $\sqrt{7}-\frac{2}{n}>0$, $\forall$ $n\in\mathbb{N}^*$; dacă presupunem că există $k\in\mathbb{N}^*$ a.î. $\sqrt{7}<\frac{2}{k}$ atunci $\frac{1}{k}<\sqrt{7}<\frac{2}{k}$, adică $1< 7k^2 <4$, ceea ce este fals).

1.11. Ştim că $2^{\log_2 9}=9$, de unde:

$$\sqrt{2^{\log_2 9}}=3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 9}=3\in\mathbb{N}.$$

Putem deci alege $a=\sqrt{2}\in\mathbf{I}$ şi $b=\log_2 9\in\mathbf{I}$.

1.12. Scriind că:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)=\left(a^{n+1}+\frac{1}{a^{n+1}}\right)+\left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right), \text{ adică}$$

$$a^{n+1}+\frac{1}{a^{n+1}}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)-\left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right),$$

totul rezultă făcând inducţie matematică după $n\in\mathbb{N}$.

Dacă $n = -m \in\mathbb{Z}$, cu $m\in\mathbb{N}$ avem că $a^n+\frac{1}{a^n}=a^m+\frac{1}{a^m}$ şi facem inducţie matematică după $m\in\mathbb{N}$.

1.13. Dacă $\alpha=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ cu $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\cos\left(k\cdot\frac{m\pi}{n}\right)$ ia cel mult 2n valori distincte atunci când $k\in\mathbb{N}$ (pentru aceasta este suficient să ne reamintim că rădăcinile ecuaţiei $x^{2n}-1=0$, care sunt în număr de 2n, sunt date de (1):

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{2n}+i\sin\frac{2k\pi}{2n}=\cos\frac{k}{n}\pi+i\sin\frac{k}{n}\pi,\ 0\le k\le 2n-1$$

şi că pentru orice valoare a lui k, în afară de cele arătate mai sus, nu obţinem numere x_k distincte de cele date de (1)).

Să presupunem acum prin absurd că $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, cu m, n $\in \mathbb{Z}$ şi n $\in \mathbb{N}^*$.

Vom demonstra că pentru t = 2^k, k$\in\mathbb{N}^*$, $\cos(t\pi\alpha)$ ia o infinitate de valori distincte şi din acest fapt va rezulta că presupunerea α∈$\mathbb{Q}$ este falsă.

Pentru aceasta vom utiliza identitatea $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Cum $x = \alpha\pi$ avem $\cos(2\alpha\pi) = 2 \cdot \frac{1}{9} - 1 = \frac{2}{9} - 1$ (cu 2 ce nu se divide prin 3).

În continuare scriem

$$\cos\left(2^2 \pi\alpha\right) = 2\cos^2(2\pi\alpha) - 1 = 2\left(\frac{2}{9} - 1\right)^2 - 1 = \frac{98}{3^4} - 1 = \frac{98}{3^{2^2}} - 1$$

(cu 98 ce nu se divide prin 3).

Să presupunem acum că $\cos\left(2^k \alpha\pi\right) = \frac{r}{3^{2^k}} - 1$ (cu r nedivizibil prin 3) şi să arătăm că $\cos\left(2^{k+1} \alpha\pi\right) = \frac{s}{3^{2^{k+1}}} - 1$ (cu s nedivizibil prin 3).

Într-adevăr,

$$\cos\left(2^{k+1} \alpha\pi\right) = 2\cos^2\left(2^k \alpha\pi\right) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{r}{3^{2^k}} - 1\right)^2 - 1 = \frac{s}{3^{2^{k+1}}} - 1,$$

unde $s = 2 \cdot \left(r^2 - 2r \cdot 3^{2^k} + 3^{2^{k+1}}\right)$ (evident cum r nu se divide prin 3 atunci nici r^2 nu se divide prin 3, deci nici s nu se divide prin 3).

Deci $\cos\left(2^k \alpha\pi\right) = \frac{r}{3^{2^k}} - 1$ (cu $3 \nmid r$) pentru orice k$\in\mathbb{N}$ şi astfel concluzia problemei este imediată.

1.14. Fie $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k$ cu k$\in\mathbb{N}$. Atunci $a^2+b^2=kab$ $\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 - kab = 0$. Cum $\Delta_a = k^2b^2-4b^2=b^2(k^2-4)$, pentru ca a$\in\mathbb{N}$

trebuie ca expresia k^2-4 să fie pătrat perfect, adică $k^2-4=s^2$ (cu $s\in\mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow$ $k^2-s^2 = 4 \Leftrightarrow (k-s)(k+s) = 4 \Leftrightarrow$

(1) $\begin{cases} k-s=-4 \\ k+s=-1 \end{cases}$ sau (2) $\begin{cases} k-s=-2 \\ k+s=-2 \end{cases}$ sau (3) $\begin{cases} k-s=4 \\ k+s=1 \end{cases}$ sau

(4) $\begin{cases} k-s=2 \\ k+s=2 \end{cases}$ sau (5) $\begin{cases} k-s=-1 \\ k+s=-4 \end{cases}$ sau (6) $\begin{cases} k-s=1 \\ k+s=4 \end{cases}$

În cazurile (1), (3), (5) şi (6) obţinem că $k=-\frac{5}{2}\notin\mathbb{N}$ sau $k=\frac{5}{2}\notin\mathbb{N}$.

În cazurile (2) şi (4) obţinem că s = 0 şi k = ±2.

Atunci $a=\frac{kb}{2}=\pm b$ şi cum a, $b\in\mathbb{N}$ rămâne numai posibilitatea a = b.

1.15. Fie $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ şi să presupunem prin absurd că $x\in\mathbb{Q}_+^*$. Atunci $x^3=5+3\cdot\sqrt[3]{6}\cdot x$, de unde am deduce că $\sqrt[3]{6}=\frac{x^3-5}{3x}\in\mathbb{Q}$ - absurd !.

1.16. Fie $\alpha=\frac{z+z'}{1+zz'}$. Cum $z\cdot\overline{z}=|z|^2=1$ şi $z'\cdot\overline{z'}=|z'|^2=1$ deducem că $\overline{z}=\frac{1}{z}$ şi $\overline{z'}=\frac{1}{z'}$, astfel că:

$$\overline{\alpha}=\frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\cdot\overline{z'}}=\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{z'}}{1+\frac{1}{zz'}}=\frac{z+z'}{zz'+1}=\alpha\text{, de unde }\alpha\in\mathbb{R}.$$

1.17. Fie $\alpha=\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\ldots.(z_n+z_1)}{z_1\cdot\ldots.\cdot z_n}$.

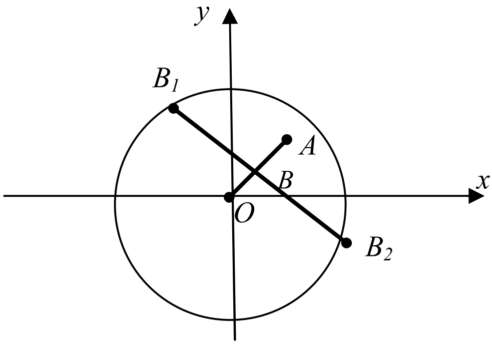
Cum $z_i \cdot \overline{z_i} = |z_i|^2 = r^2$, pentru orice 1≤i≤n, deducem că $\overline{z_i} = \frac{r^2}{z_i}$, pentru orice 1≤i≤n. Astfel:

$$\overline{\alpha} = \frac{\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\left(\overline{z_2}+\overline{z_3}\right)\ldots\left(\overline{z_n}+\overline{z_1}\right)}{\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_n}} = \frac{\left(\frac{r^2}{z_1}+\frac{r^2}{z_2}\right)\left(\frac{r^2}{z_2}+\frac{r^2}{z_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{r^2}{z_n}+\frac{r^2}{z_1}\right)}{\frac{r^2}{z_1}\cdot\ldots\cdot\frac{r^2}{z_n}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{z_n}+\frac{1}{z_1}\right)}{\frac{1}{z_1\cdot\ldots\cdot z_n}} = \frac{(z_1+z_2)\ldots(z_n+z_1)}{z_1\ldots z_n} = \alpha,$$ de

unde α∈ℝ.

1.18. Să arătăm la început că D_0={z∈ℂ | |z|<1}⊆M. Cum |±1| = 1 ⇒-1, 1∈M, adică 0 = (-1)+1∈M. Fie acum z∈ℂ a.î. 0<|z|<1. Considerăm în planul raportat la sistemul de axe xOy cercul de centru O şi rază 1 şi punctul A de afix z situat în interiorul cercului :



Dacă B este mijlocul lui OA, atunci B are afixul $\frac{z}{2}$. Perpendiculara în B pe OA taie cercul în B_1 şi B_2. Dacă B_i are afixul z_i, i = 1, 2, atunci $z = z_1+z_2$ (căci OB_1AB_2 este romb).

Cum $|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow z_1, z_2 \in M$. Atunci $z = z_1+z_2 \in M$, adică $D_0 \subseteq M$.

Să arătăm acum că şi coroana circulară $D_1=\{z\in\mathbb{C} \mid 1<|z|\le 2\}\subseteq M$. Pentru $z\in D_1$, $1<|z|\le 2$, deci $\left|\frac{z}{2}\right|\le 1$, adică $\frac{z}{2}\in D_0\subseteq M$ sau $\left|\frac{z}{2}\right|=1$, deci $\frac{z}{2}\in M$. Cum $z=2\cdot\frac{z}{2}$ iar $\frac{z}{2}\in M$, deducem că $z\in M$, adică $D_1\subseteq M$.

Analog se demonstrează că în ipoteza

$$D_n=\{z\in\mathbb{C} \mid 2^{n-1}<|z|\le 2^n\}\subseteq M \Rightarrow D_{n+1}\subseteq M$$

(căci $2^n<|z|\le 2^{n+1} \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right|\le 2^n \Rightarrow \frac{z}{2}\in D_n\subseteq M \Rightarrow \frac{z}{2}\in M$

$\Rightarrow z=2\cdot\frac{z}{2}\in M$).

Deci $D_n\subseteq M$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, şi cum $\mathbb{C}=\bigcup_{n\ge 0} D_n$ deducem că $\mathbb{C}\subseteq M$ şi cum $M\subseteq\mathbb{C}$ deducem că $M=\mathbb{C}$.

1.19. (i). Avem : $b\in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \Leftrightarrow \exists a\in \bigcup_{i\in I} A_i$ a.î. $b=f(a) \Leftrightarrow$ $\exists i_0\in I$ a.î. $a\in A_{i_0}$ şi $b=f(a) \Leftrightarrow \exists i_0\in I$ a.î. $b\in f(A_{i_0}) \Leftrightarrow b\in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

(ii). Cum pentru orice $k\in I$, $\bigcap_{i\in I} A_i\subseteq A_k$, deducem că $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\subseteq f(A_k)$ şi cum k este oarecare deducem că $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

Observaţie. Sunt situaţii când pentru anumite familii $(A_i)_{i\in I}$ de mulţimi incluziunea de la (ii) este strictă; dacă vom considera de exemplu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, iar $A_1=[-1,\ 0]$, $A_2=(0,\ 1]$ atunci $f(A_1)=[0,\ 1]$, $f(A_2)=(0,\ 1]$, deci $f(A_1)\cap f(A_2)=(0,\ 1]$, pe când $A_1\cap A_2=\emptyset$, deci $f(A_1\cap A_2)=f(\emptyset)=\emptyset\subset$ $\subset f(A_1)\cap f(A_2)$.

(iii). Avem : $a\in f^{-1}\left(\bigcup\limits_{j\in J} B_j\right) \Leftrightarrow f(a)\in \bigcup\limits_{j\in J} B_j \Leftrightarrow \exists j_0\in J$ a.î. $f(a)\in B_{j_0} \Leftrightarrow \exists j_0\in J$ a.î. $a\in f^{-1}(B_{j_0}) \Leftrightarrow a\in \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

(iv). Totul rezultă din echivalențele:

$a\in f^{-1}\left(\bigcap\limits_{j\in J} B_j\right) \Leftrightarrow f(a)\in \bigcap\limits_{j\in J} B_j \Leftrightarrow \forall j\in J,\ f(a)\in B_j \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall j\in J,\ a\in f^{-1}(B_j) \Leftrightarrow a\in \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}\left(B_j\right)$.

1.20. Facem inducție matematică după n.

Pentru $n=1$ egalitatea din enunț se reduce la $|M_1|=|M_1|$, ceea ce este evident. Pentru $n=2$ trebuie demonstrată egalitatea :

$$(1)\quad |M_1\cup M_2|=|M_1|+|M_2|-|M_1\cap M_2|$$

care de asemenea este adevărată, deoarece elementele din $M_1\cap M_2$ apar atât la M_1 cât şi la M_2.

Presupunem egalitatea din enunț adevărată pentru oricare m submulțimi ale lui M cu $m<n$ şi o să o demonstrăm pentru n submulțimi $M_1, M_2, ..., M_n$.

Dacă notăm $N=\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} M_i$, atunci conform relației (1) putem scrie: (2) $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i\right| = |N\cup M_n|=|N| + |M_n| - |N\cap M_n|$. Însă $N\cap M_n=\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} M_i\right)\cap M_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}\left(M_i\cap M_n\right)$, deci aplicând ipoteza de inducție pentru $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}\left(M_i\cap M_n\right)$ şi ținând seama de faptul că $\left(M_i\cap M_n\right)\cap\left(M_j\cap M_n\right)=\left(M_i\cap M_j\right)\cap M_n$,

$(M_i \cap M_n) \cap (M_j \cap M_n) \cap (M_k \cap M_n) = (M_i \cap M_j \cap M_k) \cap M_n$, etc, obținem relația (3):

$$\left|N \cap M_n\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1}(M_i \cap M_n)\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\left|M_i \cap M_n\right| - \sum_{1\le i<j\le n-1}\left|M_i \cap M_j \cap M_n\right| +$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n-1}\left|M_i \cap M_j \cap M_k \cap M_n\right| - .... + (-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right|$$

Aplicând ipoteza de inducție şi pentru |N| obținem:

$$\left|N\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} M_i\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\left|M_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n-1}\left|M_i \cap M_j\right| +$$

(4)

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n-1}\left|M_i \cap M_j \cap M_k\right| - .... + (-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n-1} M_i\right|$$

astfel că ținând cont de (3) şi (4) relația (2) devine:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} M_i\right| = \left|N\right| + \left|M_n\right| - \left|N \cap M_n\right| = \left(\sum_{i=1}^{n-1}\left|M_i\right| + \left|M_n\right|\right) -$$

$$-\left(\sum_{1\le i<j\le n-1}\left|M_i \cap M_j\right| + \sum_{i=1}^{n-1}\left|M_i \cap M_n\right|\right) +$$

$$+\left(\sum_{1\le i<j<k\le n-1}\left|M_i \cap M_j \cap M_k\right| + \sum_{1\le i<j\le n-1}\left|M_i \cap M_j \cap M_n\right|\right) - ... +$$

$$+\left[(-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n-1} M_i\right|\right] -$$

$$-(-1)^{n-3}\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_{n-2}\le n-1}\left|M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap .... \cap M_{i_{n-2}} \cap M_n\right| -$$

$$-(-1)^{n-2}\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|M_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|M_i \cap M_j\right| +$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|M_i \cap M_j \cap M_k\right| - ... + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right|.$$

Conform principiului inducției matematice, egalitatea din enunț este adevărată pentru orice număr natural n nenul.

1.21. (i). Facem inducție matematică după m; dacă m=1, mulțimea M va avea un singur element şi este clar că vom avea $n=n^1$ funcții de la M la N. Presupunem afirmația adevărată pentru mulțimile M ce au cel mult m-1 elemente.

Dacă M este o mulțime cu m elemente, putem scrie $M=M'\cup\{x_0\}$, cu $x_0\in M$ iar M' submulțime a lui M cu m-1 elemente, $x_0\notin M'$.

Pentru orice $y\in N$ şi pentru orice funcție $g : M'\to N$, considerând $f_{g,\,y} : M\to N$, $f_{g,\,y}(x) = g(x)$ dacă $x\in M'$ şi y dacă $x=x_0$, deducem că oricărei funcții $g: M'\to N$ îi putem asocia n funcții distincte de la M la N ale căror restricții la M' sunt egale cu g. Aplicând ipoteza de inducție pentru funcțiile de la M' la N, deducem că de la M la N se pot defini $n\cdot n^{m-1}=n^m$ funcții.

(ii). Facem inducție matematică după m; dacă m=1, mulțimile M şi N vor avea câte un singur element şi vom avea o singură funcție bijectivă de la M la N.

Presupunem afirmația adevărată pentru toate mulțimile M' şi N' ambele având cel mult m-1 elemente şi fie M şi N mulțimi având fiecare câte m elemente. Scriind $M=M'\cup\{x_0\}$, cu $x_0\in M$ iar M' submulțime a lui M cu m-1 elemente, $x_0\notin M'$, atunci orice funcție bijectivă $f:M\to N$ este perfect determinată de valoarea $f(x_0)\in N$ precum şi de o funcție bijectivă $g:M'\to N'$, unde $N'=N \setminus \{f(x_0)\}$. Deoarece pe $f(x_0)$ îl putem alege în m moduri iar pe g în (m-1)! moduri (conform ipotezei de inducție) deducem că de la M la N putem defini $(m-1)!\cdot m=m!$ funcții bijective.

(iii). Dacă $f:M\to N$ este injectivă, atunci luând drept codomeniu pe $f(M)\subseteq N$, deducem că f determină o funcție bijectivă $\overline{f}:M\to f(M)$, $\overline{f}(x)=f(x)$, pentru orice $x\in M$, iar f(M) are m elemente. Reciproc, dacă vom alege în N o parte N' a sa cu m elemente, atunci putem stabili m! funcții bijective de la M la N'

(conform cu (ii).). Cum numărul submulțimilor N′ ale lui N care au m elemente este egal cu C_n^m, rezultă că putem construi m!$\cdot C_n^m = A_n^m$ funcții injective de la M la N.

(iv). Să considerăm M={x_1, x_2, ...,x_m}, N={y_1, y_2, ...,y_n} iar M_i mulțimea funcțiilor de la M la N a.î. y_i nu este imaginea nici unui element din M, i=1,2,...,n.

Astfel dacă notăm prin F_m^n mulțimea funcțiilor de la M la N, mulțimea funcțiilor surjective S_m^n de la M la N va fi complementara mulțimii $M_1 \cup M_2 \cup .. ... \cup M_n$ din F_m^n, deci conform problemei **1.20.** avem egalitățile (1):

$$\left|S_m^n\right| = \left|F_m^n\right| - \left|\bigcup_{i=1}^n M_i\right| = n^m - \left|\bigcup_{i=1}^n M_i\right| = n^m - \sum_{i=1}^n \left|M_i\right| + \sum_{1\le i<j\le n}\left|M_i \cap M_j\right|$$
$$- \sum_{1\le i<j<k\le n}\left|M_i \cap M_j \cap M_k\right| + ... + (-1)^n\left|M_1 \cap M_2 \cap .... \cap M_n\right|.$$

Deoarece M_i este de fapt mulțimea funcțiilor definte pe M cu valori în N \ {y_i }, $M_i \cap M_j$ este mulțimea funcțiilor definite pe M cu valori în N \ {y_i , y_j} ..., etc, conform punctului (i) avem că:

(2) $|M_i| = (n-1)^m$, $|M_i \cap M_j| = (n-2)^m$, ..., etc,

($|M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_n| = 0$, deoarece $M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_n = \varnothing$).

Deoarece sumele ce apar în (1) au, respectiv, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n temeni egali, ținând cont de acest lucru şi de (2), relația (1) devine:

$$S_m^n = n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.$$

1.22. Vom demonstra echivalența afirmațiilor astfel (i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)⇒(vi)⇒(vii)⇒(i) iar apoi (i)⇔(viii) .

(i)⇒(ii). Fie A, A′∈P(M) a.î. f_*(A)=f_*(A′)⇔f(A)=f(A′).

Dacă $x\in A$, atunci $f(x)\in f(A)\Rightarrow f(x)\in f(A')\Rightarrow$ există $x'\in A'$ a.î. $f(x)=f(x')$. Cum f este injectivă, rezultă $x=x'\in A'$, adică $A\subseteq A'$; analog $A'\subseteq A$, deci $A=A'$, adică f_* este injectivă.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Pentru $A\in P(M)$ trebuie demonstrat că $(f^*\circ f_*)(A) = A\Leftrightarrow f^{-1}(f(A))=A$. Incluziunea $A\subseteq f^{-1}(f(A))$ este valabilă pentru orice funcție f. Pentru cealaltă incluziune, dacă $x\in f^{-1}(f(A))\Rightarrow f(x)\in f(A)\Rightarrow$există $x'\in A$ a.î. $f(x) = f(x')\Rightarrow f_*(\{x\})=$
$= f_*(\{x'\})\Rightarrow \{x\}=\{x'\} \Rightarrow x=x'\in A$, adică $f^{-1}(f(A))\subseteq A$.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Deoarece $f^*\circ f_*=1_{P(M)}$, pentru orice $A\in P(M)$, $f^*(f_*(A))=A$, deci notând $B=f_*(A)\in P(N)$ avem că $f^*(B)=A$, adică f^* este surjectivă.

(iv)$\Rightarrow$(v). Fie $A, B\in P(M)$ și $A', B'\in P(N)$ a.î. $A=f^{-1}(A')$ și $B=f^{-1}(B')$. Atunci $f(A\cap B)=f(f^{-1}(A')\cap f^{-1}(B'))=f(f^{-1}(A'\cap B'))$.

Să arătăm că $f(f^{-1}(A'))\cap f(f^{-1}(B'))\subseteq f(f^{-1}(A'\cap B'))$. Dacă $y\in f(f^{-1}(A'))\cap f(f^{-1}(B'))\Rightarrow y\in f(f^{-1}(A'))$ și $y\in f(f^{-1}(B'))$ $\Rightarrow$ există $x'\in f^{-1}(A')$ și $x''\in f^{-1}(B')$ a.î. $y=f(x')=f(x'')$.

Cum $x'\in f^{-1}(A')$ și $x''\in f^{-1}(B')\Rightarrow f(x')\in A'$ și $f(x'')\in B'$, deci $y\in A'\cap B'$. Deoarece $y = f(x')\Rightarrow x'\in f^{-1}(A'\cap B')$, adică $y\in f(f^{-1}(A'\cap B'))$.

Astfel, $f(A\cap B)\supseteq f(A)\cap f(B)$ și cum incluziunea $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$ este adevărată pentru orice funcție deducem că $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

(v)$\Rightarrow$(vi). Pentru $A\in P(M)$ avem:

$f(A)\cap f(\complement_M A)=f(A\cap \complement_M A)=f(\emptyset)=\emptyset$, deci $f(\complement_M A)\subseteq \complement_N f(A)$.

(vi)$\Rightarrow$(vii). Fie $g, h : L\rightarrow M$ două funcții a.î. $f\circ g=f\circ h$ și să presupunem prin absurd că există $x\in L$ a.î. $g(x)\neq h(x)$, adică $g(x)\in \complement_M\{h(x)\}$; atunci :

$f(g(x))\in f(\complement_M\{h(x)\})\subseteq\complement_N f(h\{x\})=\complement_N\{f(h(x))\}$,

deci $f(g(x)) \neq f(h(x)) \Leftrightarrow (f\circ g)(x) \neq (f\circ h)(x) \Leftrightarrow f\circ g\neq f\circ h$, ceea ce este absurd.

(vii)$\Rightarrow$(i). Fie $x, x'\in M$ a.î. $f(x)=f(x')$ şi să presupunem prin absurd că $x\neq x'$. Notând $L=\{x, x'\}$ şi definind $g, h : L\to M$, $g(x)=x$, $g(x')=x'$, $h(x)=x'$, $h(x')=x$, atunci $g\neq h$ şi totuşi $f\circ g=f\circ h$, ceea ce este absurd.

(i)$\Rightarrow$(viii). Definind $g:N\to M$, $g(y)=x$ dacă $y=f(x)$ cu $x\in M$ şi y_0 dacă $y\notin f(M)$, atunci datorită injectivității lui f, g este definită corect şi evident $g\circ f=1_M$.

(viii)$\Rightarrow$(i). Dacă $x, x'\in M$ şi $f(x) = f(x')$, atunci $g(f(x))= =g(f(x'))\Rightarrow x = x'$, adică f este injectivă.

1.23. Vom demonstra echivalența afirmațiilor astfel: (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Rightarrow$(vi)$\Rightarrow$(i) iar apoi (i)$\Leftrightarrow$(vii).

(i)$\Rightarrow$(ii). Fie $B\in P(N)$ şi $y\in B$; atunci există $x_y\in M$ a.î. $f(x_y)=y$.

Notând $A=\{x_y | y\in B\}\subseteq M$ avem că $f(A)=B \Leftrightarrow f_*(A)=B$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Avem de demonstrat că pentru orice $B\in P(N)$, $f(f^{-1}(B))=B$ **.** Incluziunea $f(f^{-1}(B))\subseteq B$ este valabilă pentru orice funcție f. Fie acum $y\in B$; cum f_* este surjectivă, există $A\in P(M)$, a.î. $f_*(A)=\{y\}\Leftrightarrow f(A)=\{y\}$, deci există $x\in A$ a.î. $y=f(x)$ şi deoarece $y\in B \Rightarrow x\in f^{-1}(B)\Rightarrow y=f(x)\in f(f^{-1}(B))$, de unde şi incluziunea $B\subseteq f(f^{-1}(B))$.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Dacă $B_1, B_2\in P(N)$ şi $f^*(B_1)=f^*(B_2)$, atunci $f_*(f^*(B_1))=f_*(f^*(B_2)) \Leftrightarrow 1_{P(N)}(B_1)=1_{P(N)}(B_2)\Leftrightarrow B_1=B_2$, adică f^* este injectivă.

(iv)$\Rightarrow$(v). Fie $A\subseteq M$; a arăta că $f(\complement_M A)\supseteq\complement_N f(A)$, revine la $f(\complement_M A)\cup f(A)=N \Leftrightarrow f(\complement_M A\cup A)=N\Leftrightarrow f(M)=N$. Să presupunem prin absurd că există $y_0 \in N$ a.î. pentru orice $x \in M$, $f(x) \neq y_0$, adică $f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset \Leftrightarrow f^{*}(\{y_0\}) = \emptyset$.

Deoarece şi $f^{*}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow f^{*}(\{y_0\}) = f^{*}(\emptyset)$ iar pentru că f^{*} este presupusă injectivă ar rezulta că $\{y_0\} = \emptyset$, ceea ce este absurd.

(v)$\Rightarrow$(vi). În particular, pentru A=M ar trebui să avem:

$$f(\complement_M M) \supseteq \complement_N f(M) \Leftrightarrow f(\emptyset) \supseteq \complement_N f(M) \Leftrightarrow \emptyset \supseteq \complement_N f(M) \Leftrightarrow f(M) = N.$$

Dacă $g, h : N \to P$ sunt două funcţii a.î. $g \circ f = h \circ f$, atunci pentru orice $y \in N$, există $x \in M$ a.î. $f(x) = y$ (căci $f(M) = N$) şi astfel $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$, adică $g = h$.

(vi)$\Rightarrow$(i). Presupunem prin absurd că există $y_0 \in N$ a.î. $f(x) \neq y_0$, pentru orice $x \in M$.

Definim $g, h : N \to \{0, 1\}$ astfel : $g(y) = 0$, $\forall y \in N$ şi

$$h(y) = \begin{cases} 0 & pentru \;\; y \in N - \{y_0\} \\ 1 & pentru \;\; y = y_0 \end{cases}$$

Evident $g \neq h$ şi totuşi $g \circ f = h \circ f$, ceea ce este absurd, deci f este surjectivă.

(i)$\Rightarrow$(vii). Pentru fiecare $y \in N$ alegând câte un singur $x_y \in f^{-1}(\{y\})$, obţinem astfel o funcţie $g : N \to M$, $g(y) = x_y$, pentru orice $y \in N$, ce verifică în mod evident relaţia $f \circ g = 1_N$.

(vii)$\Rightarrow$(i). Pentru $y \in N$, scriind că $f(g(y)) = y$, rezultă $y = f(x)$, cu $x = g(y) \in M$, adică f este surjectivă.

1.24. Rezultă imediat din problemele **1.22.** şi **1.23.**.

1.25. Vom demonstra următoarele implicaţii: (i)$\Rightarrow$(ii) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(i).

(i)$\Rightarrow$(ii). Dacă f este injectivă, atunci f(M) şi M au acelaşi număr de elemente şi cum $f(M) \subseteq M$ rezultă că $f(M) = M$, adică f este şi surjectivă.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Dacă f este surjectivă, atunci pentru orice element $y \in M$ va exista un unic element $x_y \in M$ a.î. $f(x_y)=y$ (căci în caz contrar ar rezulta contradicția că M ar avea mai multe elemente decât M), adică f este şi injectivă.

(iii)$\Rightarrow$(i). Evident.

1.26. (i). „$\Rightarrow$”. Rezultă din problema **1.25.** .

„$\Leftarrow$”. Presupunem prin absurd că A este infinită. Vom construi în această ipoteză o funcție $f : A \to A$ care este injectivă fără a fi însă surjectivă, ceea ce va fi absurd.

Mulțimea A fiind infinită, putem găsi o submulțime strictă a sa, numărabilă, $B=\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Definim $f : A \to A$,

$$f(x) = \begin{cases} a_{i+1}, & pentru\ \ x = a_i,\ \ i = 1,2,... \\ x, & pentru\ \ x \in A - B \end{cases}.$$

Evident, f este injectivă dar nu şi surjectivă deoarece $a_1 \notin f(A)$.

(ii). „$\Rightarrow$”. Rezultă din problema **1.25.**.

„$\Leftarrow$”. Ideea de rezolvare este asemănătoare cu cea folosită la (i): vom construi în ipoteza că A este infinită o funcție $g : A \to A$ care este surjectivă fără a fi însă injectivă. Dacă B este mulțimea de la (i), definim $g:A \to A$ astfel:

$$g(x) = \begin{cases} a_{i-1}, & pentru\ \ x = a_i,\ \ i = 2,3,... \\ x, & pentru\ \ x \in A - B \\ a_1, & pentru\ \ x = a_1 \end{cases}.$$

care este surjectivă fără a fi însă injectivă (deoarece $f(a_1) = f(a_2)$ şi $a_1 \neq a_2$), ceea ce este în contradicție cu ipoteza, rezultând astfel finitudinea lui A.

1.27. Din relația $f \circ f = 1_M$ deducem că f este bijectivă (conform problemelor **1.22.** şi **1.23.**) deci există $f^{-1} : M \to M$. Vom grupa elementele lui M în perechi (x, y) cu proprietatea că f(x) = y şi x $\neq$ y (posibil datorită bijectivităţii lui f). În cadrul acestor grupări vor intra un număr par de elemente iar cum M are un număr impar de elemente, deducem că există $x\in M$ a.î f(x) = x.

1.28. Vom arăta la început că dacă n, $k\in\mathbb{N}$ şi $n\geq k$, atunci $f(n)\geq k$ (făcând inducţie matematică după k). Pentru k=0 totul este clar căci $f(n)\geq 0$, f(n) fiind un număr natural.

Fie acum $n\geq k+1$; atunci, conform ipotezei $f(n)>f(f(n-1))$. Cum $n-1\geq k$, conform ipotezei de inducţie avem $f(n-1)\geq k$ iar apoi din aceleaşi motive $f(f(n-1))\geq k$ şi astfel $f(n)>f(f(n-1))\geq k \Rightarrow f(n)>k \Rightarrow f(n)\geq k+1$.

Să presupunem prin absurd că există un $k\in\mathbb{N}$ a.î. f(k)>k şi fie n>k; atunci $n-1\geq k$, deci $f(n-1)\geq n-1\geq k$. Prin urmare, $n>k \Rightarrow f(n-1)\geq k$. Relaţia f(n)>f(f(n-1)) conduce la concluzia: pentru orice n>k, există m>k (anume m=f(n-1)) a.î. f(m)<f(n), de unde concluzia falsă că $\{f(n) : n>k\}$ nu are element minimal, rezultând astfel că f(k)=k, pentru orice $k\in\mathbb{N}$, adică $f = 1_{\mathbb{N}}$.

1.29. Dacă toate funcţiile f_n $(n\geq 1)$ sunt surjective, afirmaţia este evidentă. Dacă nu, pentru fiecare număr natural k $(k\geq 1)$, vom construi câte o mulţime $B_k\subseteq A_k$ cu proprietatea că $f_k(B_k) = B_{k-1}$.

Pentru aceasta vom nota, $B_{k,\ t} = (f_{k+1}\circ f_{k+2}\circ\ldots\circ f_{k+t})(A_{k+t})$, $k\geq 0$, $t\geq 1$. Deoarece pentru un k fixat avem şirul de incluziuni $B_{k,\ t} \subseteq \ldots \subseteq B_{k,\ 1} \subseteq A_k$, oricare ar fi $t\geq 1$, cum A_k este finită, există un $t_k\in\mathbb{N}$ a.î.

(1) $\qquad B_{k,t_k} = B_{k,t_k+1} = \ldots = B_{k,t_k+i}$, pentru orice $i\in\mathbb{N}$

(alegem pe t_k ca fiind cel mai mic număr natural cu această proprietate).

Vom nota $B_k = B_{k,t_k}$, pentru orice $k\in\mathbb{N}$. Să demonstrăm că $f_k(B_k) = B_{k-1}$, pentru orice $k\geq 1$. Din definiția lui B_{k-1} avem:

$$B_{k-1} = B_{k-1,t_{k-1}} = (f_k\circ f_{k+1}\circ\ldots\circ f_{k-1+t_{k-1}})(A_{k-1+t_{k-1}}),$$

unde t_{k-1} este cel mai mic număr natural cu proprietatea că

$$(2) \qquad B_{k-1,t_{k-1}} = B_{k-1,t_{k-1}+1} = \ldots$$

Aplicând pe f_k egalităților (1) obținem:

$(f_k\circ f_{k+1}\circ\ldots\circ f_{k+t_k})(A_{k+t_k}) = (f_k\circ f_{k+1}\circ\ldots\circ f_{k+t_k+1})(A_{k+t_k+1}) = \ldots$, adică:

$$(3) \qquad B_{k-1,t_k} = B_{k-1,t_k+1} = \ldots .$$

Ținând cont de alegerea lui t_{k-1}, din (3) rezultă cu necesitate $t_{k-1} \leq t_k$, pentru orice $k\geq 1$. Astfel, ținând cont de alegerea lui t_{k-1} avem:

$$B_{k-1} = B_{k-1,t_{k-1}} = (f_k\circ f_{k+1}\circ\ldots\circ f_{k-1+t_{k-1}})(A_{k-1+t_{k-1}}) = \ldots =$$
$$= (f_k\circ f_{k+1}\circ\ldots\circ f_{k+t_k})(A_{k+t_k}) = f_k((f_{k+1}\circ\ldots\circ f_{k+t_k})(A_{k+t_k})) = f_k(B_k).$$

În aceste condiții, definirea şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, este următoarea: plecăm de la un $x_0\in B_0\subseteq A_0$; cum $f_1(B_1) = B_0$ putem alege $x_1\in B_1\subseteq A_1$ a.î. $f_1(x_1) = x_0$, ş.a.m.d..

1.30. Fie S_1^k, S_2^k mulțimile de soluții pentru ecuațiile (1), respectiv (2). Plecând de la observația imediată că $(X_1, X_2, \ldots, X_k)\in S_1^k \Leftrightarrow (C_M X_1, C_M X_2, \ldots, C_M X_k)\in S_2^k$, deducem că S_1^k şi S_2^k au acelaşi număr de elemente. Pentru a demonstra că $|S_1^k| = (2^k-1)^n$, vom face inducție după k. Pentru k = 1 afirmația este evidentă, deoarece în acest caz $S_1^1=\{M\}$, deci $|S_1^1|=1=(2^1-1)^n$.

Să presupunem că $|S_1^{k-1}| = (2^{k-1}-1)^n$ şi să considerăm ecuația $X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k\cup X_{k+1}=M$, cu $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1} \subseteq M$. Să fixăm pe X_{k+1}; dacă $|X_{k+1}| = p$ ($p\leq n$), atunci pe X_{k+1} o putem alege în C_n^p moduri.

Pentru ca $(X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k)\cup X_{k+1} = M$, cu necesitate $X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k$ trebuie să fie de forma $X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k= = C_M X_{k+1}\cup Y = M'$, cu $Y\subseteq X_{k+1}$. Să găsim pentru $|Y| = t$, $0\leq t\leq p$ câte soluții are ecuația $X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k = M'$. Avem că $|M'| = |C_M X_{k+1}\cup Y| = |C_M X_{k+1}|+|Y| = n-p+t$.

Conform ipotezei de inducție, ecuația $X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k=M'$ va avea $(2^k-1)^{n-p+t}$ soluții. Cum pe Y ca submulțime cu t elemente a lui X_{k+1} o putem alege în C_p^t moduri, deducem că numărul de soluții pentru ecuațiile $X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k=C_M X_{k+1}\cup Y$ (când Y parcurge submulțimile lui X_{k+1}) va fi egal cu $\sum\limits_{t=0}^{p}(2^k-1)^{n-p+t}C_p^t=(2^k-1)^{n-p}\sum\limits_{t=0}^{p}(2^k-1)^t C_p^t =$ $(2^k-1)^{n-p}(2^k-1+1)^p = = (2^k-1)^{n-p}2^{kp}$.

Deci numărul de soluții al ecuației $(X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_k)\cup X_{k+1} = M$ va fi egal cu:

$$\sum_{p=0}^{n}(2^k-1)^{n-p}\cdot 2^{kp}\cdot C_n^p = \sum_{p=0}^{n}(2^k-1)^{n-p}(2^k)^p C_n^p =(2^k-1+2^k)^n =$$
$$= (2\cdot 2^k-1)^n = (2^{k+1}-1)^n.$$

Conform principiului inducției matematice, afirmația din enunț este valabilă pentru orice $k\geq 1$.

1.31. (i). Dacă $x, y\in M$ şi $f(x)=f(y)$, atunci $g(f(x))=g(f(y))$ $\Leftrightarrow$ $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$ $\Leftrightarrow$ $x=y$, adică f este injectivă. O condiție suplimentară pe care dacă o verifică f, atunci din $g\circ f$ injectivă rezultă şi g injectivă, este ca f să fie surjectivă.

Într-adevăr, dacă $x, y\in N$ şi $g(x)=g(y)$, cum f este presupusă surjectivă, există $x', y'\in M$ a.î $f(x')=x$ şi $f(y')=y$, deci

$g(x) = g(y) \Rightarrow g(f(x')) = g(f(y')) \Rightarrow (g\circ f)(x') = (g\circ f)(y') \Rightarrow x' = y' \Rightarrow$ $f(x') = f(y') \Rightarrow x = y$, adică g este injectivă.

(ii). Fie $y\in P$; cum $g\circ f$ este surjectivă există $x\in M$ a.î. $(g\circ f)(x) = y \Leftrightarrow g(f(x)) = y$ şi cum $f(x)\in N$ deducem că g este surjectivă. Pentru partea a doua a enunţului, să demonstrăm că dacă în plus g este injectivă, atunci din $g\circ f$ surjectivă rezultă surjectivitatea lui f .

Într-adevăr, fie $y\in N$; atunci $g(y)\in P$ şi cum $g\circ f$ este surjectivă există $x\in M$ a.î. $(g\circ f)(x) = g(y) \Leftrightarrow g(f(x)) = g(y)$ şi cum g este presupusă injectivă rezultă $f(x) = y$, adică f este surjectivă.

1.32. (i). Să presupunem de exemplu că $h\circ g\circ f$ şi $g\circ f\circ h$ sunt injective iar $f\circ h\circ g$ este surjectivă (celelalte cazuri se tratează analog). Ţinând cont de problema **1.31.**, deducem că f şi h sunt injective iar f este surjectivă, rezultând astfel că f este bijectivă.

Din $h\circ g\circ f$ injectivă şi f bijectivă deducem că $h\circ g$ este injectivă, adică g este injectivă. Din $f\circ h\circ g$ surjectivă şi f bijectivă rezultă că $h\circ g$ este surjectivă, adică h este surjectivă. Cum h este şi injectivă, deducem că este de fapt bijectivă. Din f şi h bijective iar $f\circ h\circ g$ surjectivă deducem că g este şi surjectivă, adică de fapt este bijectivă.

(ii). Se tratează analog cu (i).

1.33. Fie $y\in N$; cum u este surjectivă, există $x\in M$ a.î. $u(x) = y$.

Definim $h:N\rightarrow P$, $h(y) = f(x)$. Dacă mai avem $x'\in M$ a.î. $u(x')=y$, atunci deoarece $g\circ u=v\circ f$ avem $g(u(x))=v(f(x))$ şi

$g(u(x'))=v(f(x'))\Leftrightarrow g(y)=v(f(x))$ şi $g(y)=v(f(x'))$
$\Rightarrow v(f(x))=v(f(x'))$

$\Rightarrow$ $f(x)=f(x')$ (deoarece v este injectivă), adică h este corect definită şi $h\circ u = f$. Fie $y\in N$ şi $x\in M$ a.î. $u(x)=y$; demonstrăm că $v\circ h=g$, adică $v(h(y))=g(y)$ $\Leftrightarrow$ $v(h(u(x)))=g(u(x))$ $\Leftrightarrow$ $v(f(x))=g(u(x))$ $\Leftrightarrow$ $(v\circ f)(x)=(g\circ u)(x)$, care este adevărată din ipoteză. Pentru a demonstra unicitatea lui h cu proprietățile din enunț, să mai considerăm $h':N\rightarrow P$ a.î. $h'\circ u=f$ şi $v\circ h'=g$. Dacă $y\in N$, atunci există $x\in M$ a.î. $u(x)=y$; Din $h'\circ u=f$ $\Rightarrow$ $h'(u(x))=f(x)$ $\Rightarrow h'(y)=f(x)=h(y)$, adică $h=h'$.

1.34. (i). Evident, $M_1 = f(M)\subseteq M$ deci $f(f(M))\subseteq f(M)$ $\Leftrightarrow$ $f^2(M)\subseteq f(M)$ $\Leftrightarrow$ $M_2\subseteq M_1$. Raționând recurent, obținem şirul descrescător de submulțimi ale lui M:

(1) $\quad \ldots \subseteq M_{n+1}\subseteq M_n\subseteq\ldots\subseteq M_3\subseteq M_2\subseteq M_1\subseteq M.$

Fie $k, t\in\mathbb{N}$ a.î. $M_k=M_t$ şi $k < t$. Din (1) deducem că $M_k=M_{k+1}=\ldots=M_{t-1}=M_t$.

În particular, $f^{t-1}(M) = f^{t}(M)$, de unde aplicând succesiv f, f^2, f^3, … obținem $f^{t}(M) = f^{t+1}(M) = \ldots$, adică, $M_t=M_{t+1} = \ldots$ Deci pentru orice $n\geq k$, avem $M_n=M_{n+1}=\ldots$ Astfel, dacă f este surjectivă, atunci $M_1=M_2=\ldots=M$. Să arătăm că dacă f este injectivă, fără a fi însă surjectivă, atunci incluziunile de la (1) sunt stricte; în caz contrar, alegem un $k\in\mathbb{N}$ minim cu proprietatea că $M_k=M_{k+1}$. Cum f este injectivă, conform problemei **1.22.**, există $g:M\rightarrow M$ a.î. $g\circ f = 1_M$.

Din $f^k(M) = f^{k+1}(M)$, aplicând g obținem $g(f^k(M)) = $ $= g(f^{k+1}(M)) \Leftrightarrow f^{k-1}(M) = f^k(M)$, adică $M_{k-1}=M_k$, contrazicând astfel minimalitatea lui k.

(ii). Dacă f este injectivă, fără a fi însă surjectivă, conform cu (i), şirul de incluziuni (1) fiind strict descendent, rezultă că M este infinită. Pentru fiecare $y_0 \in M$ putem defini $g_{y_0}:M \to M$, $g_{y_0}(x)=x$, dacă $y=f(x)$ şi y_0 dacă $y \in M \setminus f(M)$. În mod evident $\{g_{y_0} : y_0 \in M\}$ este infinită şi pentru orice $y_0 \in M$ avem $g_{y_0} \circ f = 1_M$.

(iii). Cum f nu este injectivă există, $x, y \in M$, $x \neq y$ şi $f(x) = f(y) = z$. Deoarece $f^{-1}(\{z\})$ conține cel puțin două elemente distincte, din felul în care am definit inversa la stânga a lui f (vezi problema **1.23.**), deducem că putem găsi cel puțin două inverse diferite ale lui f la stânga.

1.35. (i). „$\Rightarrow$”. Avem $f(A \cup B)=((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B)=$ $= (A, B)$ iar $f(M)=(M \cap A, M \cap B) = (A, B)$, adică $f(A \cup B) = f(M)$ şi cum f este presupusă injectivă deducem că $A \cup B=M$.

„$\Leftarrow$”. Fie $X, Y \in P(M)$ a.î. $f(X) = f(Y) \Leftrightarrow (X \cap A, X \cap B) = $ $= (Y \cap A, Y \cap B) \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$ şi $X \cap B = Y \cap B$. Rezultă că $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) \Leftrightarrow X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B) \Leftrightarrow X \cap M = Y \cap M \Leftrightarrow X = Y$, adică f este injectivă.

(ii). „$\Rightarrow$”. Considerând elementul $(A, \emptyset) \in P(A) \times P(B)$, cum f este presupusă surjectivă există $X \in P(M)$ a.î. $f(X) = (A, \emptyset) \Leftrightarrow (A, \emptyset)=(X \cap A, X \cap B) \Leftrightarrow X \cap A=A$ şi $X \cap B=\emptyset$. Din $X \cap B=\emptyset$ deducem

$A \cap (X \cap B)=A \cap \emptyset \Leftrightarrow (X \cap A) \cap B=\emptyset \Leftrightarrow A \cap B=\emptyset$.

„$\Leftarrow$”. Să presupunem acum că $A\cap B=\emptyset$ şi fie $S_1\in P(A)$, $S_2\in P(B)$. Atunci $f(S_1\cup S_2) = ((S_1\cup S_2)\cap A, (S_1\cup S_2)\cap B) =$
$= ((S_1\cap A)\cup(S_2\cap A), (S_1\cap B)\cup(S_2\cap B))=(S_1\cup\emptyset, \emptyset\cup S_2)=(S_1, S_2)$, adică f este surjectivă.

(iii). Totul rezultă din (i) şi (ii); ţinând cont de (ii) deducem că inversa lui f, $f^{-1}: P(A)\times P(B)\to P(M)$ va fi dată de $f^{-1}(S_1, S_2)=S_1\cup S_2$, pentru orice $(S_1, S_2)\in P(A)\times P(B)$.

1.36. Avem că :

$$f(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(4n-1), & pentru\ n<0\\ 1, & pentru\ n=0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(4n-1), & pentru\ n>0\end{cases}=\begin{cases}1-2n, & pentru\ n<0\\ 1, & pentru\ n=0\\ 2n, & pentru\ n>0\end{cases}.$$

Considerând acum funcţia $g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Z}$,

$$g(n) = (-1)^n\cdot\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\frac{(1-n)}{2}, & pentru\ n\ impar\\ 0, & pentru\ n=1\\ \frac{n}{2}, & pentru\ n\ par\end{cases},$$

se constată cu uşurinţă că $g = f^{-1}$.

1.37. Pentru fiecare număr natural n vom considera mulţimile:

$P_n= \{(1, n-1), (2, n-2), \dots, (k, n-k), \dots, (n-1, 1)\}$

$Q_n= \{p\in\mathbb{N}^* : p=(n-1)(n-2)/2+k,\ 1\le k\le n-1\}$.

Despre aceste mulţimi vom arăta:

1) Dacă $m \neq n$, atunci $P_m \cap P_n = \emptyset$

2) $\bigcup_{n \in N^*} P_n = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

3) Dacă $m \neq n$, atunci $Q_m \cap Q_n = \emptyset$

4) pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $f(P_n) = Q_n$.

Afirmația 1) este evidentă, ținând cont de felul în care sunt definite mulțimile P_n.

În legătură cu 2), să remarcăm că $\bigcup_{n \in N^*} P_n \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Fie acum $(r, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$; cum $(r, s) \in P_{r+s} \subset \bigcup_{n \in N^*} P_n$, deducem și cealaltă incluziune, de unde egalitatea cerută.

Pentru a demonstra 3), fie $m \neq n$; va fi suficient să demonstrăm că dacă $m<n$, atunci $(m-1)(m-2)/2+k<(n-1)(n-2)/2+t$, pentru orice k cu $1 \leq k \leq m-1$ și orice t cu $1 \leq t \leq n-1$.

Într-adevăr, din $m<n$ deducem că $m<m+1 \leq n$, deci $(n-1)(n-2)/2+t \geq m(m-1)/2+t = (m-1)(m-2)/2+m-1+t \geq (m-1)(m-2)/2 + m > (m-1)(m-2)/2+m-1 \geq (m-1)(m-2)/2+k$.

Egalitatea de la 4) o vom demonstra prin dublă incluziune.

Într-adevăr, dacă $(x, y) \in P_n$, atunci $x + y=n$, deci $1 \leq x \leq n-1$ și cum $f(x, y) = (n-1)(n-2)/2+x$, deducem că $f(x, y) \in Q_n$, adică $f(P_n) \subseteq Q_n$.

Reciproc, dacă $p \in Q_n$, atunci $p=(n-1)(n-2)/2+k$ cu $1 \leq k \leq n-1$ și notând $x=k$, $y=n-k$, cum $(x, y) \in P_n$ deducem că $f(x, y)=p$, adică $Q_n \subseteq f(P_n)$. Deoarece P_n și Q_n au fiecare câte n-1 elemente, deducem că restricția lui f la P_n cu valori în Q_n este bijectivă.

Să arătăm acum injectivitatea lui f.

Pentru aceasta fie (x, y), (x′, y′)$\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ a.î. f(x, y)= = f(x′, y′). Dacă (x, y), (x′, y′) aparțin aceleiaşi mulțimi P_n, atunci (x, y) = (x′, y′) deoarece am văzut mai înainte că restricția lui f la P_n este bijectivă. Acesta fiind de altfel singurul caz posibil (deoarece în cazul în care (x, y)$\in P_m$, (x′, y′)$\in P_n$, cu m $\neq$ n, atunci f(x, y) = f(x′, y′)$\in f(P_m)\cap f(P_n)$ = $Q_m\cap Q_n=\emptyset$, ceea ce este absurd), deducem că f este injectivă. Surjectivitatea lui f o vom stabili prin inducție. Evident 1=f(1, 1). Să presupunem că există $(x_n, y_n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ a.î. $n=f(x_n, y_n)$.

Dacă definim

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (x_n+1, y_n-1), & pentru\ \ y_n \neq 1 \\ (1, x_n+1), & pentru\ \ y_n = 1 \end{cases}$$ să

arătăm că $n+1= f(x_{n+1}, y_{n+1})$.

Avem:

$$f(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (x_n+y_n-1)(x_n+y_n-2)/2+x_n+1, & pentru\ \ y_n \neq 1 \\ x_n(x_n+1)/2+1, & pentru\ \ y_n = 1 \end{cases}$$

$$= (x_n+y_n-1)(x_n+y_n-2)/2+x_n+1 = f(x_n, y_n)+1 = n+1.$$

Conform principiului inducției matematice, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ există $(x_n, y_n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ a.î. $n = f(x_n, y_n)$, adică f este surjectivă, deci bijectivă.

1.38. (i). Ținând cont de faptul că:

(1) pentru orice $A\in P(M)$, $A\subseteq f^{-1}(f(A))$ şi

(2) pentru orice $B \in P(N)$, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$,

avem pentru orice $A \in P(M)$: $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(A) \subseteq f(f^{-1}(f(A)))$
$\Rightarrow \quad f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) \Leftrightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(\varphi(A))$.

Aplicând (2) pentru $B=f(A)$, cu $A \in P(M)$, avem $f(f^{-1}(f(A))) \subseteq f(A) \Rightarrow f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) \subseteq f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow$

$\varphi(\varphi(A)) \subseteq \varphi(A)$, de unde egalitatea cerută.

(ii). Ținând cont de notațiile de la problemele **1.22.** şi **1.23.** deducem că $\varphi = f^{*} \circ f_{*}$. Conform problemei **1.22.**, f este injectivă $\Leftrightarrow f^{*} \circ f_{*} = 1_{P(M)} \Leftrightarrow \varphi = 1_{P(M)}$.

1.39. (i). Se demonstrează analog cu punctul (i) de la problema **1.38.**

(ii). Rezultă imediat ținând cont de problema **1. 23.**, deoarece $\psi = f_{*} \circ f^{*}$.

1.40. (i) **,,$\Rightarrow$''.** Evidentă.

,,$\Leftarrow$''. Presupunem că $\varphi_A = \varphi_B$ şi fie $x \in A$; atunci $\varphi_A(x) = \varphi_B(x) = 1$, deci $x \in B$, adică $A \subseteq B$. Analog $B \subseteq A$, de unde $A = B$.

(ii). Evident.

(iii). Pentru $x \in M$ putem avea următoarele situații: ($x \notin A$, $x \notin B$) sau ($x \in A$, $x \notin B$) sau ($x \notin A$, $x \in B$) sau ($x \in A$, $x \in B$). În fiecare situație în parte se verifică imediat relația $\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x)$.

Cum $A \cap A = A \Rightarrow \varphi_A = \varphi_A \varphi_A = \varphi_A^{\,2}$.

(iv), (v). Asemănător cu (iii).

(vi). Avem:

$$\varphi_{A\Delta B}=\varphi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)}=\varphi_{A\setminus B}+\varphi_{B\setminus A}-\varphi_{A\setminus B}\varphi_{B\setminus A}=$$
$$=\varphi_A-\varphi_A\varphi_B+\varphi_B-\varphi_B\varphi_A-\varphi_{(A\setminus B)\cap(B\setminus A)}=$$
$$=\varphi_A+\varphi_B-2\varphi_A\varphi_B$$

deoarece $(A\setminus B)\cap(B\setminus A)=\emptyset$.

1.41. Fie A, $B\in P(M)$ a.î. $A\setminus B$ şi $A\cap B$ sunt nevide.

Dacă $x\in A\setminus B \Rightarrow \psi_A(x)=a,\ \psi_B(x)=b,\ \psi_{A\cap B}(x)=b$.

Dacă $x\in A\cap B \Rightarrow \psi_A(x)=a,\ \psi_B(x)=a,\ \psi_{A\cap B}(x)=a$.

Dacă $x\notin A\cup B \Rightarrow \psi_A(x)=b,\ \psi_B(x)=b,\ \psi_{A\cap B}(x)=b$.

Cum $\psi_{A\cap B}=\psi_A\,\psi_B$ (prin ipoteză), deducem că trebuie să fie simultan adevărate egalităţile $ab=b$, $a^2=a$, $b^2=b$, de unde se deduce imediat că $a=1$ şi $b=0$.

1.42. (i). Fie $E=A\Delta(B\Delta C)$ şi $F=(A\Delta B)\Delta C$. Conform problemei **1.40.**, a demonstra că $E=F$ este echivalent cu a arăta că $\varphi_E=\varphi_F$. Avem:

$$\varphi_E=\varphi_{A\Delta(B\Delta C)}=\varphi_A+\varphi_{B\Delta C}-2\varphi_A\varphi_{B\Delta C}=$$
$$=\varphi_A+\varphi_B+\varphi_C-2\varphi_B\varphi_C-2\varphi_A(\varphi_B+\varphi_C-2\varphi_B\varphi_C)$$
$$=\varphi_A+\varphi_B+\varphi_C-2(\varphi_A\varphi_B+\varphi_B\varphi_C+\varphi_C\varphi_A)+4\varphi_A\varphi_B\varphi_C.$$

Analog se demonstreză că:

$$\varphi_F=\varphi_A+\varphi_B+\varphi_C-2(\varphi_A\varphi_B+\varphi_B\varphi_C+\varphi_C\varphi_A)+4\varphi_A\varphi_B\varphi_C,$$

de unde rezultă că $\varphi_E=\varphi_F$, adică $E=F$.

(ii), (iii). Se demonstrează analog ca şi (i).

Observaţie. Egalităţile de la (ii) şi (iii) poartă numele de *relaţiile lui De Morgan.*

1.43. Se observă că $f(n)\geq 0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Cum g este bijectivă, există $n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $g(n_0)=0$. Dacă $h(n_0)>0$, $g(n_0)-h(n_0)<0$, contradicţie, deci $h(n_0)=0$, adică $f(n_0)=0$.

Cum g este bijectivă, există $n_1\in\mathbb{N}$ a.î. $g(n_1)=1$.

Dacă $h(n_1)>1$, atunci $g(n_1)-h(n_1)<0$, contradicţie, deci $h(n_1)=1$ şi din nou $f(n_1)=0$.

Presupunem că f(k)=0 pentru valorile n_0, n_1, …, n_{k-1} pentru care g ia valorile 0, 1, 2, …, k-1.

Deoarece g este bijectivă există un $n_k \in \mathbb{N}$ a.î. $g(n_k) = k$. Dacă $h(n_k)>k$, atunci $g(n_k)-h(n_k)<0$, contradicție, deci $h(n_k) = k$, adică $f(n_k) = 0$. Conform principiului inducției matematice $f(n) = 0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

1.44. (i). Evidentă.

(ii). Cum $\Delta_A \subseteq \overline{\rho}$ deducem că $\overline{\rho}$ este reflexivă iar cum $\overline{\rho}^{-1} = (\Delta_A \cup \rho \cup \rho^{-1})^{-1} = \Delta_A^{-1} \cup \rho^{-1} \cup (\rho^{-1})^{-1} = \Delta_A \cup \rho \cup \rho^{-1} = \overline{\rho}$ deducem că $\overline{\rho}$ este şi simetrică.

(iii). Dacă ρ' este reflexivă şi simetrică a.î. $\rho \subseteq \rho'$, atunci $\rho^{-1} \subseteq \rho'^{-1} = \rho'$ şi cum $\Delta_A \subseteq \rho'$ deducem că $\overline{\rho} = \Delta_A \cup \rho \cup \rho^{-1} \subseteq \rho'$.

1.45. (i). Evident.

(ii). Cum $\Delta_A \subseteq \rho \subseteq \overline{\rho}$ deducem că $\Delta_A \subseteq \overline{\rho}$, adică $\overline{\rho}$ este reflexivă. Deoarece ρ este simetrică şi pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $(\rho^n)^{-1} = (\rho^{-1})^n = \rho^n$, deducem că:

$$\overline{\rho}^{-1} = \left(\bigcup_{n\geq 1} \rho^n\right)^{-1} = \bigcup_{n\geq 1} \left(\rho^n\right)^{-1} = \bigcup_{n\geq 1} \rho^n = \overline{\rho}\ ,$$

adică $\overline{\rho}$ este şi simetrică. Fie acum $(x, y) \in \overline{\rho} \circ \overline{\rho}$; atunci există $z\in A$ a.î. $(x, z), (z, y) \in \overline{\rho}$, adică există $m, n\in\mathbb{N}^*$ a.î. $(x, z)\in\rho^m$ şi $(z, y)\in\rho^n$. Deducem imediat că $(x, y)\in\rho^n\circ\rho^m = \rho^{n+m} \subseteq \overline{\rho}$, adică $\overline{\rho}^2 \subseteq \overline{\rho}$, deci $\overline{\rho}$ este tranzitivă, adică $\overline{\rho} \in$Echiv (A).

(iii). Fie acum $\rho' \in$Echiv (A) a.î. $\rho \subseteq \rho'$. Cum $\rho^n \subseteq \rho'^n = \rho'$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ deducem că $\overline{\rho} = \bigcup_{n\geq 1} \rho^n \subseteq \rho'$.

1.46. (i). Evident.

(ii). Dacă notăm $\rho_1 = \Delta_A \cup \rho \cup \rho^{-1}$, conform problemei **1.44.**, ρ_1 este simetrică şi reflexivă. Conform problemei **1.45.**, $\overline{\rho} = \bigcup_{n\geq 1} \rho_1^n \in$ Echiv (A).

(iii). Analog ca punctul (iii) de la problema **1.45.**.

1.47. (i). Avem: $(x, y) \in (\rho\cup\rho')^2 = (\rho\cup\rho')\circ(\rho\cup\rho') \Leftrightarrow$ $\exists\, z\in A$ a.î. $(x, z)\in\rho\cup\rho'$ şi $(z, y)\in\rho\cup\rho' \Leftrightarrow [(x, z)\in\rho$ şi $(z, y)\in\rho]$ sau $[(x, z)\in\rho'$ şi $(z, y)\in\rho']$ sau $[(x, z)\in\rho'$ şi $(z, y)\in\rho]$ sau $[(x, z)\in\rho$ şi $(z, y)\in\rho'] \Leftrightarrow (x, y)\in\rho^2$ sau $(x, y)\in\rho'^2$ sau $(x, y)\in\rho\circ\rho'$ sau $(x, y)\in\rho'\circ\rho \Leftrightarrow (x, y)\in\rho^2\cup\rho'^2\cup(\rho\circ\rho')\cup(\rho'\circ\rho)$, de unde egalitatea cerută.

(ii). „$\Rightarrow$''. Avem că $\rho^2=\rho$, $\rho'^2=\rho'$ şi $(\rho\cup\rho')^2=\rho\cup\rho'$. Astfel, relaţia de la (i) devine: $\rho\cup\rho'=\rho\cup\rho'\cup(\rho\circ\rho')\cup(\rho'\circ\rho)$, deci $\rho\circ\rho'\subseteq\rho\cup\rho'$ şi $\rho'\circ\rho\subseteq\rho\cup\rho'$.

„$\Leftarrow$''. Utilizăm ipoteza din nou şi relaţia de la (i):

$$(\rho\cup\rho')^2=\rho^2\cup\rho'^2\cup(\rho\circ\rho')\cup(\rho'\circ\rho)=\rho\cup\rho'\cup(\rho\circ\rho')\cup(\rho'\circ\rho)\subseteq\rho\cup\rho',$$

deci $\rho\cup\rho'$ este tranzitivă. Cum $\Delta_A\subseteq\rho$ şi $\Delta_A\subseteq\rho' \Rightarrow \Delta_A\subseteq\rho\cup\rho'$, adică $\rho\cup\rho'$ este reflexivă.

Dacă $(x, y)\in\rho\cup\rho' \Rightarrow (x, y)\in\rho$ sau $(x, y)\in\rho' \Rightarrow (y, x)\in\rho$ sau $(y, x)\in\rho' \Rightarrow (y, x)\in\rho\cup\rho'$, adică $\rho\cup\rho'$ este şi simetrică, deci o echivalenţă pe A.

1.48. Fie $\overline{\rho} = \bigcup_{\rho\in F} \rho$; reflexivitatea şi simetria lui $\overline{\rho}$ sunt imediate. Pentru tranzitivitate fie $(x, y), (y, z)\in\overline{\rho} \Leftrightarrow$ există ρ_1, $\rho_2\in\mathcal{F}$ a.î. $(x, y)\in\rho_1$, $(y, z)\in\rho_2$; să presupunem de exemplu că $\rho_1 \subseteq \rho_2$. Atunci şi $(x, y)\in\rho_2$ şi cum ρ_2 este relaţie de echivalenţă, deducem că $(x, z)\in\rho_2 \subseteq \overline{\rho} \Rightarrow (x, z)\in\overline{\rho}$, adică este şi tranzitivă, deci este o relaţie de echivalenţă.

1.49. Avem că $\rho\circ\rho^{-1}=\{(x, y) \mid$ există $z\in A$ a.î. $(x, z)\in\rho^{-1}$ şi $(z, y)\in\rho\}$.

Deci, pentru a demonstra că $\Delta_A\subseteq\rho\circ\rho^{-1}$ ar trebui ca pentru orice $x\in A$, $(x, x)\in\rho\circ\rho^{-1}$ adică să existe $z\in A$ a.î. $(z, x)\in\rho$, lucru asigurat de (i). Deducem că $\rho\circ\rho^{-1}$ este reflexivă.

Dacă $(x, y)\in\rho\circ\rho^{-1}\Rightarrow$ există $z\in A$ a.î. $(x, z)\in\rho^{-1}$ şi $(z, y)\in\rho$ $\Leftrightarrow$ există $z\in A$ a.î. $(y, z)\in\rho^{-1}$ şi $(z, x)\in\rho\Leftrightarrow(y, x)\in\rho\circ\rho^{-1}$, adică $\rho\circ\rho^{-1}$ este simetrică.

Cum $(\rho\circ\rho^{-1})\circ(\rho\circ\rho^{-1}) = (\rho\circ\rho^{-1}\circ\rho)\circ\rho^{-1} = \rho\circ\rho^{-1}$ deducem că $\rho\circ\rho^{-1}$ este şi tranzitivă, deci este o echivalenţă.

Referitor la $\rho^{-1}\circ\rho$ avem relaţiile: $(\rho^{-1}\circ\rho)^{-1}=\rho^{-1}\circ(\rho^{-1})^{-1}=\rho^{-1}\circ\rho$ deci $\rho^{-1}\circ\rho$ este o relaţie simetrică; $(\rho^{-1}\circ\rho)^2= \rho^{-1}\circ\rho\circ\rho^{-1}\circ\rho= \rho^{-1}\circ\rho$, deci $\rho^{-1}\circ\rho$ este tranzitivă; cum $\rho^{-1}\circ\rho$ este evident şi reflexivă, rezultă că $\rho^{-1}\circ\rho$ este şi ea o relaţie de echivalenţă.

1.50. (i). Dacă $\rho_1\circ\rho_2\in Echiv(A)$, atunci $(\rho_1\circ\rho_2)^{-1}= = \rho_2^{-1}\circ\rho_1^{-1}= \rho_2\circ\rho_1$, adică $\rho_1\circ\rho_2=\rho_2\circ\rho_1$.

Invers, să presupunem că $\rho_1\circ\rho_2=\rho_2\circ\rho_1$.

Cum $\Delta_A\subseteq\rho_1$, $\rho_2\Rightarrow\Delta_A=\Delta_A\circ\Delta_A\subseteq\rho_1\circ\rho_2$, adică $\rho_1\circ\rho_2$ este reflexivă.

Cum $(\rho_1\circ\rho_2)^{-1}= \rho_2^{-1}\circ\rho_1^{-1} =\rho_2\circ\rho_1= \rho_1\circ\rho_2$, deducem că $\rho_1\circ\rho_2$ este şi simetrică.

Din $(\rho_1\circ\rho_2)^2 = (\rho_1\circ\rho_2)\circ(\rho_1\circ\rho_2) = \rho_1\circ(\rho_2\circ\rho_1)\circ\rho_2 = = \rho_1\circ(\rho_1\circ\rho_2)\circ\rho_2 = \rho_1^2\circ\rho_2^2 =\rho_1\circ\rho_2$ deducem că $\rho_1\circ\rho_2$ este şi tranzitivă, adică este o echivalenţă pe A.

(ii). Să notăm prin $\overline{\rho}$ membrul drept al egalităţii ce trebuie stabilită. Dacă $\rho'\in Echiv\ (A)$ a.î. ρ_1, $\rho_2\subseteq\rho'$, atunci $\rho_1\circ\rho_2 \subseteq\rho'\circ\rho'=\rho'$, adică $\rho_1\circ\rho_2\subseteq\overline{\rho}$.

Cum ρ_1, ρ_2 sunt reflexive, $\rho_1, \rho_2 \subseteq \rho_1 \circ \rho_2$ şi cum $\rho_1 \circ \rho_2$ este relaţie de echivalenţă, deducem că $\overline{\rho} \subseteq \rho_1 \circ \rho_2$ de unde egalitatea $\overline{\rho} = \rho_1 \circ \rho_2$.

1.51. Pentru $x \in M$, vom nota prin $[x]_\rho$ clasa de echivalenţă a lui x modulo relaţia ρ.

Pentru $x \in M$, definim: $\overline{f}([x]_\rho) = [f(x)]_{\rho'}$.

Dacă $x, y \in M$ a.î. $[x]_\rho = [y]_\rho \Leftrightarrow (x, y) \in \rho \Rightarrow [f(x), f(y)] \in \rho'$ (din enunţ) $\Rightarrow [f(x)]_{\rho'} = [f(y)]_{\rho'}$, adică $\overline{f}$ este corect definită.

Dacă $x \in M$, atunci $(\overline{f} \circ p_{M,\rho})(x) = \overline{f}(p_{M,\rho}(x)) = \overline{f}([x]_\rho) = $
$= [f(x)]_{\rho'} = p_{N,\rho'}(f(x)) = (p_{N,\rho'} \circ f)(x)$, adică $p_{N,\rho'} \circ f = = \overline{f} \circ p_{M,\rho}$.

Pentru a demonstra unicitatea lui $\overline{f}$, să presupunem că ar mai exista o funcţie $\overline{f}\,'$: $M / \rho \to N / \rho'$ a.î. $p_{N,\rho'} \circ f = \overline{f}\,' \circ p_{M,\rho}$ şi fie $x \in M$.Atunci $\overline{f}\,'([x]_\rho) = \overline{f}\,'(p_{M,\rho}(x)) = (\overline{f}\,' \circ p_{M,\rho})(x) = (p_{N,\rho'} \circ f)(x)$ $= p_{N,\rho'}(f(x)) = [f(x)]_{\rho'} = \overline{f}([x]_\rho)$, de unde deducem că $\overline{f} = \overline{f}\,'$.

1.52. (i). Evident (relaţia de egalitate fiind o echivalenţă pe M).

(ii). Păstrând notaţia claselor de echivalenţă de la problema **1.51.**, pentru $x \in M$ definim $\overline{f}\left([x]_{\rho_f}\right) = f(x)$. Funcţia $\overline{f}$ este corect definită căci dacă $x, y \in M$ şi $[x]_{\rho_f} = [y]_{\rho_f} \Leftrightarrow (x, y) \in \rho_f$ $\Leftrightarrow f(x) = f(y)$ (de aici rezultă imediat şi injectivitatea lui $\overline{f}$) . Cum $\overline{f}$ este în mod evident şi surjectivă, deducem că $\overline{f}$ este bijectivă. Pentru a proba unicitatea lui $\overline{f}$, fie $f_1 : M / \rho_f \to Im(f)$ o altă funcţie bijectivă a.î. $i \circ f_1 \circ p_{M,\rho_f} = f$ şi $x \in M$. Atunci, $(i \circ f_1 \circ p_{M,\rho_f})(x) = f(x) \Leftrightarrow f_1\left([x]_{\rho_f}\right) = f(x) \Leftrightarrow f_1\left([x]_{\rho_f}\right) = f(x) =$ $= \overline{f}\left([x]_{\rho_f}\right)$, adică $f_1 = \overline{f}$ **.**

1.53. Deoarece pentru $x\in\mathbb{R}$, $x-x=0\in\mathbb{Z}$, deducem că ρ este reflexivă. Dacă $x, y\in\mathbb{R}$ şi $x-y\in\mathbb{Z} \Rightarrow y-x\in\mathbb{Z}$, adică $(y, x)\in\rho$, deci ρ este şi simetrică. Pentru tranzitivitate, fie $x, y, z\in\mathbb{R}$ a.î. $x-y, y-z\in\mathbb{Z}$; atunci $(x-y)+(y-z)\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x-z\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow (x, z)\in\rho$, adică ρ este şi tranzitivă, deci $\rho\in\mathrm{Echiv}(\mathbb{R})$.

Definim funcţia $f:\mathbb{R}/\rho\to[0, 1)$ prin $f((x)_\rho)=\{x\}\in[0, 1)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Dacă $x, y\in\mathbb{R}$ şi $(x)_\rho=(y)_\rho \Rightarrow x-y\in\mathbb{Z}$; scriind $x=[x]+\{x\}$, $y = [y]+\{y\} \Rightarrow x-y = ([x]-[y])+\{x\}-\{y\}$, de unde rezultă că $\{x\}-\{y\}\in\mathbb{Z}$, adică $\{x\}-\{y\} = 0$, deci f este corect definită.

Să arătăm că f este bijectivă; pentru injectivitate, fie $x, y\in\mathbb{R}$ a.î. $f((x)_\rho) = f((y)_\rho) \Rightarrow \{x\}=\{y\} \Rightarrow x-[x] = y-[y] \Rightarrow x-y = [x]-[y]\in\mathbb{Z}$, adică $(x)_\rho= (y)_\rho$, deci f este injectivă.

Cum surjectivitatea lui f este evidentă, deducem că f este bijectivă.

1.54. Probarea faptului că ρ este o echivalenţă pe P(M) nu ridică probleme.

Să arătăm că funcţia $f : P(M)/\rho \to P(N)$, $f((X)_\rho) = X\cap N$, pentru orice $X\in P(M)$, este o bijecţie. Dacă $X, Y\in P(M)$ şi $(X)_\rho= (Y)_\rho$, atunci $X\cap N = Y\cap N \Rightarrow f((X)_\rho) = f((Y)_\rho)$, adică f este corect definită (deducem totodată şi injectivitatea lui f).

Pentru $Y\in P(N)$, scriind $Y = Y\cap N \Rightarrow Y = f((Y)_\rho)$, adică f este şi surjectivă, deci bijectivă.

1.55. Fie Echiv(M) (respectiv Part(M)) mulţimea relaţiilor de echivalenţă de pe M (respectiv mulţimea partiţiilor lui M).

Vom nota prin f : Echiv (M)→Part (M) funcția ce asociază fiecărei relații de echivalență ρ de pe M, partiția lui M dată de clasele de echivalență modulo ρ: $f(\rho)=\{[x]_\rho \mid x\in M\}$ ($[x]_\rho$ fiind clasa de echivalență a lui x modulo ρ).

Definim g : Part (M)→Echiv (M) astfel : dacă $P=(M_i)_{i\in I}$ este o partiție a lui M, definim relația g(P) pe M astfel :

$$(x, y)\in g(P) \Leftrightarrow \text{ există } i\in I \text{ a.î. } x, y\in M_i .$$

Reflexivitatea şi simetria lui g (P) sunt imediate. Fie acum (x, y), (y, z)∈g(P). Există deci $i_1, i_2\in I$ a. î. $x, y\in M_{i_1}$ şi $y, z\in M_{i_2}$; dacă $i_1\neq i_2$ ar rezulta că $M_{i_1}\cap M_{i_2}\neq\emptyset$ (căci ar conține pe y), ceea ce este absurd .

Deci $i_1=i_2=i$ şi astfel $x, z\in M_i$, adică (x,z) ∈ g (P) de unde concluzia că g (P) este şi tranzitivă, deci g (P)∈ Echiv (M), funcția g fiind astfel corect definită.

Să arătăm că dacă $x\in M_i$, atunci clasa de echivalență $\bar{x}$ modulo g (P) este egală cu M_i. Într-adevăr, $y\in M_i \Leftrightarrow (x, y)\in g(P) \Leftrightarrow y\in \bar{x} \Leftrightarrow M_i=\bar{x}$.

Deducem astfel că g este de fapt inversa lui f, adică f este bijectivă.

1.56. Dacă ρ este o relație de echivalență, ρ∈Echiv (M), atunci avem surjecția canonică $p_{M,\rho} : M\to M / \rho$.

Dacă în general, f : M→N este o funcție surjectivă, atunci aceasta dă naştere la următoarea relație de echivalență de pe M : $(x, y)\in\rho_f \Leftrightarrow f(x)=f(y)$.

Mai mult, dacă g : N→N′ este o funcție bijectivă atunci relațiile ρ_f şi $\rho_{g\circ f}$ coincid căci $(x,y)\in\rho_{g\circ f}\Leftrightarrow(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)\Leftrightarrow g(f(x))=g(f(y))\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow (x, y)\in\rho_f$.

Deci, dacă N are k elemente, atunci k! funcții surjective de la M la N vor determina aceeaşi relație de echivalență pe M.

Luând în particular N=M/ρ şi ţinând cont de problema **1.21.** (iv) deducem că :

$$N_{m,k} = (1/k!) \cdot \left[k^m - C_k^1 (k-1)^m + C_k^2 (k-2)^m - \ldots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1}\right].$$

1.57. Pentru x∈N definim f(x) : I→ $\bigcup_{i \in I} M_i$ astfel:

f(x)(i) = f_i(x), pentru orice i∈I.

Să arătăm că f astfel definită verifică cerinţele enunţului.

Fie i∈I şi x∈N. Avem că (p_i∘f)(x) = f_i(x) ⇔ p_i(f(x)) = = f_i(x) ⇔ f_i(x) = f_i(x), ceea ce este evident, deci p_i∘f = f_i, pentru orice i∈I.

Fie acum o altă funcţie $\bar{f}$: N→P a.î. p_i∘ $\bar{f}$ = f_i, pentru orice i∈I.

Dacă x∈N, atunci (p_i∘ $\bar{f}$)(x) = p_i($\bar{f}$ (x)) = f_i(x), pentru orice i∈I, deci $\bar{f}$ (x)(i) = f(x)(i), deci f = $\bar{f}$.

1.58. Fie x∈S; atunci există i∈I a.î. x∈$\overline{M_i} = M_i \times \{i\}$, deci x = ($x_i$, i), cu x_i∈M_i. Definim f : S→N, f(x) = f_i(x_i) (f este corect definită deoarece pentru i≠j, $\overline{M_i} \cap \overline{M_j}$ =∅**).** Pentru i∈I, a demonstra că f∘α_i = f_i este echivalent cu (f∘α_i)(x) = f_i(x), pentru orice x∈M_i ⇔ f(α_i(x)) = f_i(x) ⇔ f((x, i)) = f_i(x) ⇔ f_i(x) = f_i(x), ceea ce este evident.

Pentru unicitatea lui f, fie $\bar{f}$: S→N a.î. $\bar{f}$ ∘α_i = f_i, pentru orice i∈I.

Atunci, pentru x∈S şi i∈I, avem: ($\bar{f}$ ∘α_i)(x) = f_i(x) ⇒ $\bar{f}$ (α_i(x)) = f_i(x) ⇒ $\bar{f}$ ((x, i)) = f((x, i)), adică $\bar{f}$ = f.

1.59. Condiţia (i) rezultă imediat din felul în care a fost definită A. Pentru (ii), fie h : P→M a. î. f∘h=g∘h; atunci pentru orice $x\in P$, $f(h(x))=g(h(x)) \Rightarrow h(x)\in Ker(f, g)$. Definim atunci $u:P\to A$, prin $u(x)=h(x)$, pentru orice $x\in P$. Evident $i\circ u=h$.

Pentru unicitatea lui u, fie $u':P\to A$ a.î. $i\circ u'=h$ şi $x\in P$. Atunci $i(u'(x))=h(x)$, de unde $u'(x)=h(x)=u(x)$, adică $u=u'$.

1.60. (i). Pentru $x\in M$, cum $(f(x), g(x))\in\rho$ iar $\rho\subseteq\overline{\rho} \Rightarrow (f(x),g(x))\in\overline{\rho} \Rightarrow (f(x))_{\overline{\rho}}=(g(x))_{\overline{\rho}} \Rightarrow p_{N,\overline{\rho}}(f(x))=p_{N,\overline{\rho}}(g(x))$.

(ii). Fie $h:N\to P$ a.î. $h\circ f = h\circ g$. Atunci $h(f(x))=h(g(x))$, pentru orice $x\in M$, deci $\rho\subseteq\rho_h$ (vezi problema **1.52.**). Cum $\overline{\rho}$ este cea mai mică relație de echivalență ce conține pe $\rho \Rightarrow \overline{\rho}\subseteq\rho_h$ (căci $\rho_h\in Echiv(N)$).

Conform problemei **1.51.**, există $\alpha : N/\overline{\rho}\to N/\rho_h$ a.î. $\alpha\circ p_{N,\overline{\rho}}=p_{N,\rho_h}$.

Conform problemei **1.52.**, există $\beta:N/\rho_h\to Im(h)$, bijectivă a.î. $h = i\circ\beta\circ p_{N,\rho_h}$, unde $i: Im(h)\to P$ este incluziunea canonică.

Să arătăm că $u = i\circ\beta\circ\alpha : N/\overline{\rho}\to P$ are proprietățile cerute de enunț. Într-adevăr, $u\circ p_{N,\overline{\rho}} = (i\circ\beta\circ\alpha)\circ p_{N,\overline{\rho}} = (i\circ\beta)\circ(\alpha\circ p_{N,\overline{\rho}})=$
$= (i\circ\beta)\circ p_{N,\rho_h} = i\circ\beta\circ p_{N,\rho_h} = h$.

Pentru unicitatea lui u, fie $\overline{u}:N/\overline{\rho}\to P$ a.î. $\overline{u}\circ p_{N,\overline{\rho}} = h$.

Avem atunci egalitatea $u\circ p_{N,\overline{\rho}} = \overline{u}\circ p_{N,\overline{\rho}}$; cum $p_{N,\overline{\rho}}$ este surjecție, conform problemei **1.23.**, rezultă $u = \overline{u}$.

1.61. (i). Dacă $(x, y)\in Q$, atunci $f(x) = g(y)$, deci $(f\circ\pi_1)(x, y) = f(\pi_1(x, y)) = f(x) = g(y) = g(\pi_2(x, y)) = (g\circ\pi_2)(x, y)$, adică $f\circ\pi_1 = g\circ\pi_2$.

(ii). Fie $x\in R$; cum $f\circ\alpha = g\circ\beta \Rightarrow f(\alpha(x)) = g(\beta(x)) \Rightarrow (\alpha(x), \beta(x))\in Q$.

Definim atunci $\gamma:R\to Q$ prin $\gamma(x) = (\alpha(x), \beta(x))$ şi se verifică imediat că $\pi_1\circ\gamma = \alpha$ şi $\pi_2\circ\gamma = \beta$.

Dacă $\bar{\gamma}:R\to Q$ este o altă funcţie a.î. $\pi_1\circ\bar{\gamma} = \alpha$ şi $\pi_2\circ\bar{\gamma} = \beta$ şi $x\in R$, atunci din $\pi_1(\bar{\gamma}(x)) = \alpha(x)$ şi $\pi_2(\bar{\gamma}(x)) = \beta(x) \Rightarrow \bar{\gamma}(x) = (\alpha(x), \beta(x)) = \gamma(x)$, adică $\bar{\gamma} = \gamma$.

1.62. (i). Pentru $x\in P$ avem: $(i_M\circ f)(x) = (i_N\circ g)(x) \Leftrightarrow i_M(f(x)) = i_N(g(x)) \Leftrightarrow p_{T,\bar{\rho}}(\alpha_M(f(x))) = p_{T,\bar{\rho}}(\alpha_N(g(x))) \Leftrightarrow p_{T,\bar{\rho}}(h_1(x)) = p_{T,\bar{\rho}}(h_2(x))$, ceea ce este adevărat ţinând cont de definirea lui ρ şi de faptul că $\rho\subseteq\bar{\rho}$. Să facem acum observaţia că $T/\bar{\rho}$ are următoarea proprietate:

Oricare ar fi o mulţime R şi $u:T\to R$ a.î. $u\circ h_1 = u\circ h_2$, există o unică funcţie $\gamma: T/\bar{\rho}\to R$ a.î. $\gamma\circ p_{T,\bar{\rho}} = u$, situaţie ilustrată de diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & T \arrow[rr, "p_{T,\bar{\rho}}"] \arrow[dr, "u"'] & & T/\bar{\rho} \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\
& & R &
\end{tikzcd}$$

Într-adevăr, γ se defineşte astfel: $\gamma((x)_{\bar{\rho}}) = u(x)$, pentru orice $x\in T$. Să arătăm că γ nu depinde de alegerea reprezentanţilor. Pentru aceasta considerăm relaţia ρ_u de pe T : $(x, y)\in\rho_u \Leftrightarrow u(x) = u(y)$ (vezi problema **1.52.**). Din $u\circ h_1 = u\circ h_2 \Rightarrow \rho\subseteq\rho_u$ şi cum $\rho_u\in Echiv(T)$ din definirea lui $\bar{\rho}$ deducem că $\bar{\rho}\subseteq\rho_u$. Deci dacă $(x)_{\bar{\rho}} = (y)_{\bar{\rho}} \Rightarrow (x, y)\in\bar{\rho}\subseteq\rho_u \Rightarrow (x, y)\in\rho_u \Rightarrow u(x) = u(y)$, adică γ este corect definită. Unicitatea lui γ rezultă din faptul că $p_{T,\bar{\rho}}$ este surjecţie.

(ii). Fie tripletul (R, α, β) a.î. $\alpha\circ f = \beta\circ g$. Avem diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha_M"] \arrow[drr, "i_M"] & & \\
P \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & R & M\amalg N=T \arrow[l, "u"] \arrow[r, "p_{T,\overline{\rho}}"] & T/\overline{\rho} \\
 & N \arrow[u, "\beta"] \arrow[ur, "\alpha_N"'] \arrow[urr, "i_N"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Atunci din proprietatea de universalitate a sumei directe (vezi problema **1.58.**) există o unică funcție $u:T\to R$ a.î. $\alpha = u\circ\alpha_M$ şi $\beta = u\circ\alpha_N$. Din $\alpha\circ f = \beta\circ g \Rightarrow (u\circ\alpha_M)\circ f = (u\circ\alpha_N)\circ g \Rightarrow u\circ(\alpha_M\circ f)=$ $= u\circ(\alpha_N\circ g) \Rightarrow u\circ h_1 = u\circ h_2$. Ținând cont de observația făcută la (i), există o unică funcție $\gamma: T/\overline{\rho}\to R$ a.î. $\gamma\circ p_{T,\overline{\rho}} = u$.

Avem $\gamma\circ i_M = \gamma\circ(p_{T,\overline{\rho}}\circ\alpha_M) = (\gamma\circ p_{T,\overline{\rho}})\circ\alpha_M = u\circ\alpha_M = \alpha$ iar $\gamma\circ i_N = \gamma\circ(p_{T,\overline{\rho}}\circ\alpha_N) = (\gamma\circ p_{T,\overline{\rho}})\circ\alpha_N = u\circ\alpha_N = \beta$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

§2. Numere cardinale.

2.1. Să presupunem prin absurd că $A \sim P(A)$, adică există o bijecție $f:A \to P(A)$. Dacă vom considera mulțimea $B=\{x\in A \mid x\notin f(x)\}$, atunci cum $B\in P(A)$ şi f este în particular surjecție, deducem că există $a\in A$ a.î. $B=f(a)$. Dacă $a\in B$, atunci $a\notin f(a)=B$ - absurd, pe când dacă $a\notin B$ atunci $a\in f(a)$, deci $a\in B$ – din nou absurd!.

2.2. Cum $A_0 \sim A_2$, există o bijecție $f:A_0\to A_2$. Dacă vom considera mulțimile $A_i=f(A_{i-2})$ pentru $i\geq 3$, atunci în mod evident: $...A_{n+1}\subseteq A_n\subseteq ...\subseteq A_2\subseteq A_1\subseteq A_0$ (ținând cont de faptul că $A_2\subseteq A_1\subseteq A_0$). Să considerăm mulțimea $A=\bigcap_{i\geq 0} A_i = \bigcap_{i\geq 1} A_i$ şi să demonstrăm că :

$$(1)\ \ A_0 = \left[\bigcup_{i\geq 0}(A_i - A_{i+1})\right]\bigcup A.$$

Incluziunea de la dreapta la stânga este evidentă. Pentru a proba cealaltă incluziune, fie $x\in A_0$. Dacă $x\in A$ atunci $x\in \left[\bigcup_{i\geq 0}(A_i - A_{i+1})\right]\bigcup A$. Dacă $x\notin A$, există $i\in\mathbb{N}$ a.î. $x\notin A_i$ şi cum $x\in A_0$, atunci $i\geq 1$. Fie deci $n\geq 1$ cel mai mic număr natural pentru care $x\notin A_n$. Atunci $x\in A_{n-1}$ şi deci $x\in A_{n-1}-A_n$, de unde $x\in \left[\bigcup_{i\geq 0}(A_i - A_{i+1})\right]\bigcup A$. Astfel avem probată şi incluziunea de la stânga la dreapta, rezultând astfel egalitatea (1).

Analog se probează şi egalitatea:

$$(2)\ \ A_1 = \left[\bigcup_{i\geq 1}(A_i - A_{i+1})\right]\bigcup A.$$

Dacă vom considera familiile de mulţimi $(B_i)_{i\in I}$ şi $(C_i)_{i\in I}$ definite astfel:

$$B_0=A \quad \text{şi} \quad B_i= A_{i-1}-A_i \text{ pentru } i\geq 1,$$

$$C_0=A \quad \text{şi} \quad C_i=\begin{cases} A_{i+1}-A_{i+2}, & pentru\ i\ impar \\ A_{i-1}-A_i, & pentru\ i\ par \end{cases}$$

atunci se observă imediat că pentru i, $j\in\mathbb{N}$, $i\neq j \Rightarrow B_i\cap B_j=C_i\cap C_j=\varnothing$ iar din (1) şi (2) deducem că:

$$(3) \quad A_0=\bigcup_{i\geq 0} B_i \quad \text{şi} \quad A_1=\bigcup_{i\geq 0} C_i \ .$$

Considerăm de asemenea şi familia de funcţii $(f_i)_{i\geq 0}$ cu $f_i : B_i\to C_i$ definită astfel $f_i=\begin{cases} 1_A, & pentru\ i=0 \\ 1_{A_{i-1}-A_i}, & pentru\ i\ par \\ f_{|A_{i-1}-A_i}, & pentru\ i\ impar \end{cases}$

(să observăm că pentru i impar, dacă $x\in A_{i-1}-A_i \Rightarrow f(x)\in A_{i+1}-A_{i+2}$ adică f_i este corect definită).

Dacă vom arăta că pentru orice $i\in\mathbb{N}$, f_i este bijectivă (suficient doar pentru i impar), atunci ţinând cont de (3) vom deduce imediat că $A_0\sim A_1$. Fie deci i impar şi $f_i= f_{|A_{i-1}-A_i}$. Deoarece f este bijectivă deducem imediat că f_i este injectivă. Pentru a proba surjectivitatea lui f_i fie $y\in A_{i+1}-A_{i+2}$, adică $y\in A_{i+1}$ şi $y\notin A_{i+2}$. Cum $A_{i+1}=f(A_{i-1})$, deducem că există $x\in A_{i-1}$ a.î. $y=f(x)$ şi deoarece $y\notin A_{i+2}$, deducem că $x\notin A_i$, adică $x\in A_{i-1}-A_i$. Astfel $y=f_i(x)$, adică f_i este şi surjectivă, deci bijectivă. Aşa după cum am observat anterior se poate construi imediat o bijecţie de la A_0 la A_1, adică $A_0\sim A_1$ şi cu aceasta teorema este complet demonstrată.

2.3. Cum $A\sim B'$ există o bijecție $f : A\to B'$ astfel că dacă vom considera $B''=f(A')\subseteq B'$ avem că $A'\sim B''$. Cum $B\sim A'$ deducem că $B''\sim B$. Obținem astfel că $B''\subseteq B'\subseteq B$ şi $B''\sim B$. Conform problemei **2.2.**, $B'\sim B$ şi cum $B'\sim A$, deducem că $B\sim A$, adică $A\sim B$.

2.4. (i). Dacă f este injecție, atunci notând cu $B' = f(A) \subseteq \subseteq B$ obținem că $|A| = |B'|$ şi cum $B' \subseteq B$ deducem că $|A| \le |B|$.

(ii). Deoarece f este surjecție există $g : B \to A$ a.î. $f\circ g = 1_B$.

În particular g este injecție şi conform cu (i), $|B| \le |A|$.

2.5. (i) şi (ii) sunt evidente.

(iii). Rezultă din problema **2.3.**.

(iv). Să presupunem că $m=|A|$, $n=|B|$, $p=|C|$. Din ipoteză avem că există $B'\subseteq B$ şi $C'\subseteq C$ a.î. $A\sim B'$ şi $B\sim C'$, adică avem bijecția $f : B \to C'$. Dacă notăm $C''=f(B')\subseteq C'$, evident că $B'\sim C''$, deci $A\sim C''$, de unde deducem că $m \le p$.

(v). Fie $m=|A|$, $n=|B|$, $p=|C|$. Mai trebuie să probăm că dacă $m\ne p$, atunci $A\nsim C$. Dacă $A\sim C$, cum $A\sim B'$, atunci $B'\sim C$ deci $p \le n$. Cum $n \le p$, atunci din (iii) deducem că $n=p$ - absurd.

(vi). Fie $m = |A|$, $n = |B|$, $p = |C|$. Putem presupune că $A \cap C = B \cap C = \varnothing$. Avem o aplicație injectivă $f : A \to B$ (deoarece $m \le n$) şi atunci aplicația $g : A \cup C \to B \cup C$,

$$g(x)= \begin{cases} f(x), & dacă\ x\in A \\ x\ , & dacă\ x\in C \end{cases}$$ este de asemenea injectivă,

deci $m+p \le n+p$.

(vii). Dacă $f : A \to B$ este aplicația injectivă de mai sus, atunci aplicația $g : A \times C \to B \times C$, $g(a,c) = (f(a),c)$ este de asemenea injectivă, deci $mp \leq np$.

(viii). Dacă $f : A \to B$ este o aplicație injectivă, atunci aplicația $g : Hom(C, A) \to Hom(C, B)$ cu $g(\varphi) = f\circ\varphi$, pentru orice $\varphi\in Hom(C, A)$, este şi ea injectivă, deci $m^p \leq n^p$.

(ix). Pentru orice aplicație $h : B \to A$ avem aplicația $g : Hom(A,C) \to Hom(B,C)$ cu $g(\varphi) = \varphi\circ h$, $(\forall)$ $\varphi\in Hom(A,C)$. Se constată imediat că dacă h este surjectivă, atunci g este injectivă.

Dacă $B \neq\emptyset$ şi fie $f : A \to B$ injectivă. Există atunci $h : B \to A$ surjectivă şi deci există $g : Hom(A, C) \to Hom(B, C)$ injectivă , ceea ce arată că $p^m \leq p^n$.

Dacă $B = \emptyset$, atunci $m \leq n$ implică $A = \emptyset$ şi deci Hom(A,C) şi Hom(B,C) conțin un singur element, adică $p^m = p^n = 1$.

2.6. Dacă $q = 0$, atunci $p = 0$ şi în acest caz $p^m = q^n = 0$.

Presupunem că $q \neq 0$. Fie $m = |X|$, $n = |Y|$, $p = |Z|$ şi $q = |U|$, unde $U \neq \emptyset$.

Din ipoteză avem că $X\sim Y'$, unde $Y'\subseteq Y$ şi $Z\sim U'$, unde $U'\subseteq U$. Atunci $Hom(X,Z) \sim Hom(Y',U')$.

Cum $U \neq \emptyset$, există $u_0\in U$. Considerăm aplicația $\varphi : Hom(Y',U') \to Hom(Y,U)$, definită prin egalitatea :

$$\varphi(f)(y) = \begin{cases} f(y), & \textit{dacă} \quad y \in Y' \\ u_0, & \textit{dacă} \quad y \notin Y' \end{cases}, \text{ unde } f\in Hom(Y',U').$$

Dacă $f, f'\in Hom(Y',U')$, a.î. $\varphi(f) = \varphi(f')$, atunci $\varphi(f)(y) = \varphi(f')(y)$, oricare ar fi $y\in Y'$, de unde rezultă $f(y) = f'(y)$, oricare ar fi $y\in Y'$, deci $f = f'$, adică aplicația φ este injectivă.

Atunci $Hom(Y',U') \sim Im(\varphi) \subseteq Hom(Y,U)$, de unde obținem că $Hom(X,Z) \sim Im(\varphi)$, ceea ce ne arată că $p^m \leq q^n$.

2.7. Fie X,Y, Z trei mulțimi oarecari a.î. $|X| = m$, $|Y| = n$ şi $|Z| = p$ şi vom demonstra că există o bijecție între mulțimile $X^{Y\times Z}$ şi $(X^Y)^Z$, unde prin X^Y am notat mulțimea $\{f : Y \to X\} = Hom(Y,X)$.

Fie $\varphi \in X^{Y\times Z}$. Pentru orice $z \in Z$, se defineşte funcția $\chi_\varphi(z) : Y \to Z$ prin $\chi_\varphi(z)(y) = \varphi(y,z)$, pentru orice $y \in Y$. Funcția $f : X^{Y\times Z} \to (X^Y)^Z$ se defineşte atunci prin $f(\varphi) = \chi_\varphi$, pentru orice $\varphi \in X^{Y\times Z}$. Funcția $g: (X^Y)^Z \to X^{Y\times Z}$ se defineşte atunci prin $g(\psi)(y,z) = \psi(z)(y)$, pentru orice $\psi \in (X^Y)^Z$ şi orice $(y,z) \in Y \times Z$. Atunci, pentru orice $\varphi \in X^{Y\times Z}$ şi orice $(y,z) \in Y\times Z$ se obține $(g \circ f)(\varphi)(y,z) = g(f(\varphi))(y,z) = \chi_\varphi(z)(y) = \varphi(y,z)$, adică $(g \circ f)(\varphi) = \varphi$, pentru orice $\varphi \in X^{Y\times Z}$, deci $g \circ f = 1_{X^{Y\times Z}}$. Pentru orice $\psi \in (X^Y)^Z$ şi orice $(y,z) \in Y\times Z$ are loc $(((f \circ g)(\psi))(z))(y) = (((f(g(\psi)))(z))(y) = (g(\psi))(y,z) = (\psi(z))(y)$, adică $((f \circ g)(\psi))(z) = \psi(z)$, pentru orice $z \in Z$, prin urmare $(f \circ g)(\psi) = \psi$, pentru orice $\psi \in (X^Y)^Z$, şi astfel $f \circ g = 1_{(X^Y)^Z}$. Rezultă că f (şi g) este bijectivă.

Deci, $(m^n)^p = m^{np}$.

2.8. Presupunem că $m_\alpha = |X_\alpha|$ şi $n_\alpha = |Y_\alpha|$. Din ipoteză există o submulțime $Z_\alpha \subseteq Y_\alpha$ a.î. $X_\alpha \sim Z_\alpha$, deci există $f_\alpha : X_\alpha \to Z_\alpha$ bijecție $(\alpha \in I)$.

Din modul de definire al produsului direct de mulțimi şi de funcții (vezi **[7,12]**) rezultă că există:

$$g = \coprod_{\alpha\in I} f_\alpha : \coprod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \coprod_{\alpha\in I} Z_\alpha \quad \text{şi} \quad h = \prod_{\alpha\in I} f_\alpha : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in I} Z_\alpha$$

bijecții, deci $\coprod_{\alpha\in I} X_\alpha \sim \coprod_{\alpha\in I} Z_\alpha$ şi $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha \sim \prod_{\alpha\in I} Z_\alpha$. Cum este evident că $\coprod_{\alpha\in I} Z_\alpha \subseteq \coprod_{\alpha\in I} Y_\alpha$ şi $\prod_{\alpha\in I} Z_\alpha \subseteq \prod_{\alpha\in I} Y_\alpha$, atunci rezultă cele două inegalități.

2.9. (i)$\Rightarrow$(ii). Fie M o mulțime infinită în sens Dedekind ; atunci există $M'\subset M$ şi o bijecţie $f:M\to M'$. Cum $M'\subset M$, există $x_0\in M$ a.î. $x_0\notin M'$. Construim prin recurență şirul de elemente $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, ..., $x_n=f(x_{n-1})$, ... şi arătăm că funcţia $\varphi:\mathbb{N}\to M$, $\varphi(n)=x_n$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ este injectivă. Pentru aceasta vom demonstra că dacă $n, n'\in\mathbb{N}$, $n\neq n'$, atunci $\varphi(n)\neq\varphi(n')$. Vom face lucrul acesta prin inducţie matematică după n.

Dacă $n=0$, atunci $n'\neq 0$, de unde $\varphi(0)=x_0$ şi $\varphi(n')=f(x_{n'-1})\in M'$ şi cum $\varphi(0)=x_0\notin M'$ deducem că $\varphi(n')\neq\varphi(0)$. Să presupunem acum că pentru orice $n\neq m'$ $\varphi(n)\neq\varphi(m')$ şi să alegem acum $n'\neq n+1$. Dacă $n'=0$, atunci $\varphi(n')=\varphi(0)=x_0\notin M'$ şi $x_{n+1}=f(x_n)\in M'$, deci $\varphi(n+1)\neq\varphi(n')$. Dacă $n'\neq 0$, atunci $\varphi(n')=f(x_{n'-1})$ şi $\varphi(n+1)=f(x_n)$. Cum $n'-1\neq n$, atunci $x_{n'-1}\neq x_n$ şi cum f este injectivă deducem că $f(x_{n'-1})\neq f(x_n)$, adică $\varphi(n')\neq\varphi(n+1)$. Rezultă deci că φ este injectivă şi deci $\varphi(\mathbb{N})\subseteq M$ este o submulţime numărabilă.

(ii)$\Rightarrow$(i). Fie M o mulţime infinită în sensul Cantor, adică există $M'\subseteq M$ a.î. $M'\sim\mathbb{N}$ (fie $f:\mathbb{N}\to M'$ o funcţie bijectivă). Se observă imediat că $\varphi : M\to M\setminus\{f(0)\}$ definită prin:

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & \textit{dacă } x\notin M' \\ f(n+1), & \textit{dacă } x=f(n) \textit{ cu } n\in N \end{cases}$$

este bine definită şi să arătăm că φ este chiar bijecţie.

Fie deci $x, x'\in M$ a.î. $\varphi(x)=\varphi(x')$.

Deoarece $M=M'\cup(M\setminus M')$ şi $\varphi(x)=\varphi(x')$, atunci $x, x'\in M'$ sau $x, x'\notin M'$. Dacă $x, x'\notin M'$, atunci în mod evident din $\varphi(x)=\varphi(x')$ deducem că $x=x'$. Dacă $x, x'\in M'$, atunci dacă

$x=f(k)$, $x'=f(t)$ deducem că $f(k+1)=f(t+1)$, de unde $k+1=t+1 \Leftrightarrow k=t \Rightarrow x=x'$.

Să arătăm acum că φ este surjectivă. Pentru aceasta fie $y \in M \setminus \{f(0)\}$. Dacă $y \notin M'$ atunci $y=\varphi(y)$, iar dacă $y \in M'$, atunci $y=f(n)$ cu $n \in \mathbb{N}$. Cum $y \neq f(0)$, atunci $n \neq 0 \Rightarrow n \geq 1$ deci putem scrie $y=f(n-1+1)=\varphi(n-1)$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Această implicație este evidentă deoarece $\mathbb{N} \nsim S_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(iii)$\Rightarrow$(ii). Vom utiliza următorul fapt: dacă M este o mulțime infinită în sens obişnuit, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există o funcție injectivă $\varphi: S_n \to M$.

Vom proba lucrul acesta prin inducție matematică referitor la n.

Pentru $n=1$ există o funcție injectivă $\varphi: S_1 \to M$ (deoarece $M \neq \emptyset$). Să presupunem acum că pentru $n \in \mathbb{N}^*$ există $\varphi: S_n \to M$ injectivă. Cum am presupus că M este infinită în sens obişnuit, atunci $\varphi(S_n) \neq M$, deci există $x_0 \in M$ a.î. $x_0 \notin \varphi(S_n)$.

Atunci $\psi: S_{n+1} \to M$, $\psi(x)=\begin{cases} \varphi(x), & pentru\ x \in S_n \\ x_0, & pentru\ x=n+1 \end{cases}$ este în mod evident funcție injectivă.

Să trecem acum la a demonstra efectiv implicația (iii)$\Rightarrow$(ii). Din rezultatul expus anterior deducem că :

$$M_k=\{\varphi: S_k \to M \mid \varphi \text{ este injecție}\} \neq \emptyset$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Cum pentru $k \neq k'$, $S_k \cap S_{k'}=\emptyset$, deducem că $M_k \cap M_{k'}=\emptyset$ Conform axiomei alegerii aplicată mulțimii $T=\{ M_k : k \in \mathbb{N} \}$, există $S \subseteq T$ a.î. $S \cap M_k \neq \emptyset$ şi este formată dintr-un singur element. Atunci $M'=\bigcup_{\varphi \in S} \mathrm{Im}(\varphi)$ este o submulțime numărabilă a lui M.

2.10. Fie A şi A' două mulţimi a.î. $|A| = \alpha$ şi $|A'| = \alpha + 1$. Putem presupune că $A' = A \cup \{x_0\}$ cu $x_0 \notin A$. Aplicaţia $i : A \to A'$, $i(a) = a$ este evident injectivă, deci $\alpha \le \alpha + 1$. Presupunem acum că $\alpha = \alpha + 1$. Atunci există o aplicaţie bijectivă $f : A \to A'$.

Aplicaţia $g : A \to A$ definită prin $g(a) = f(a)$ va fi injectivă şi $f(x_0) \notin g(A)$, deci g nu este surjectivă. Rezultă că α este un cardinal infinit.

Reciproc, să presupunem că α este infinit, deci există o aplicaţie $g : A \to A$ care este injectivă şi nu este surjectivă. Există deci un element $a_0 \in A$ a.î. $a_0 \notin g(A)$. Atunci aplicaţia $f : A' \to A$, definită prin $f(x) = \begin{cases} g(x), & dac\breve{a}\ x \in A \\ a_0, & dac\breve{a}\ x = x_0 \end{cases}$ este injectivă. Aceasta demonstrează că $\alpha + 1 \le \alpha$, deci avem $\alpha = \alpha + 1$.

2.11. Rezultă din problema anterioară prin inducţie după n.

2.12. (i). Fie mulţimea $S = \{0,1\}$. Deci $|S| = 2$. Definim funcţia $f : P(M) \to S^M = \{ g : M \to S\}$, prin $f(A) = \varphi_A$, unde $A \subseteq M$, iar φ_A este funcţia caracteristică a mulţimii A. Funcţia f este bijecţie, deci $P(M) \sim S^M$, ceea ce ţinând seama de definiţia operaţiilor cu numere cardinale conduce la $|P(M)| = 2^{|M|}$.

(ii). Fie $\alpha = |A|$. Funcţia $f : A \to P(A)$ definită prin $f(x) = \{x\}$ este evident injectivă. Deci avem că $|A| \le |P(A)|$, adică $\alpha \le 2^\alpha$. Conform problemei **2.1.** $\alpha \ne 2^\alpha$, deci $\alpha < 2^\alpha$.

Observaţie. Din (ii) rezultă că nu există un cel mai mare număr cardinal. Într-adevăr, oricare ar fi numărul cardinal α, din (ii) avem că $2^\alpha > \alpha$.

2.13. Fie $m = |X|$; cum $2 \le m$, atunci există elementele $x_0, y_0 \in X$ a.î. $x_0 \ne y_0$.

Fie $\varphi : X\times\{1\} \cup X\times\{2\} \to X\times X$ definită prin $\varphi(x,1) = (x,y_0)$ şi $\varphi(x,2) = (x,x_0)$. Se observă imediat că φ este injectivă.

Cum m + m = $|X\times\{1\}\cup X\times\{2\}|$ şi m·m = $|X \times X|$, rezultă că m + m ≤ m·m.

2.14. Din $A_i \sim B_i$ rezultă că există o bijecţie $f_i : A_i \to B_i$. Deoarece familiile de mulţimi date sunt disjuncte, pentru orice $x\in \bigcup_{i\in I} A_i$ există un singur indice $i\in I$ a.î. $x\in A_i$, de unde rezultă că se poate defini funcţia $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigcup_{i\in I} B_i$ prin $f(x) = f_i(x)$, $x\in A_i$, $i\in I$ şi se verifică uşor că aceasta este o bijecţie.

2.15. Fie A şi B două mulţimi a.î. $|A| = \alpha$ şi $|B| = \beta$. Pentru $X\in P(A)$ şi $Y\in P(B)$, notăm $T(X,Y) = \{ f : X \to Y, f \text{ bijecţie}\}$ şi fie $T = \bigcup_{(X,Y)\in P(A)\times P(B)} T(X,Y)$. Pe T definim relaţia ≤ astfel : dacă $f,f'\in T$, $f : X\to Y$ şi $f' : X'\to Y'$ atunci $f \le f' \Leftrightarrow X\subseteq X'$ şi $f(x) = f'(x)$ pentru orice $x\in X$. Evident relaţia ≤ este o relaţie de ordine pe T. Arătăm că T este inductiv ordonată. Fie $\{f_i\}_{i\in I}$ o famile total ordonată de elemente din T, $f_i : X_i \to Y_i$, atunci putem defini aplicaţia $f : \bigcup_{i\in I} X_i \to \bigcup_{i\in I} Y_i$ prin $f(x) = f_i(x)$ dacă $x\in X_i$, $i\in I$. Aplicaţia f este bijectivă, deci $f\in T$ şi evident $f_i \le f$ pentru orice $i\in I$. Fie $f_0 : X_0 \to Y_0$ un element maximal în T. Demonstrăm că $X_0 = A$ sau $Y_0 = B$. Dacă $X_0 = A$ avem o aplicaţie injectivă de la A la B, deci $\alpha \le \beta$ iar dacă $Y_0 = B$ avem o aplicaţie injectivă de la B la A, deci $\beta \le \alpha$. Pentru a demonstra că $X_0 = A$ sau $Y_0 = B$, presupunem prin absurd că $X_0 \ne A$ şi $Y_0 \ne B$ şi fie $a_0\in A\setminus X_0$, $b_0\in B\setminus Y_0$. Aplicaţia $f_1 : X_0\cup\{a_0\}\to Y_0\cup\{b_0\}$ definită prin $f_1(x)= \begin{cases} f_0(x), & dac\breve{a}\ \ x\in X_0 \\ b_0, & dac\breve{a}\ \ x = a_0 \end{cases}$ este bijectivă. Deci $f_1\in T$ şi evident $f_0 < f_1$ ceea ce contrazice maximalitatea lui f_0.

2.16. Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită prin $f(n) = (n,0)$ este injectivă; atunci $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}| \ge |\mathbb{N}|$.

Pentru a arăta inegalitatea de sens contrar, este suficient să arătăm că există o injecţie g : ℕ × ℕ → ℕ.

Să verificăm că funcţia $g(m,n) = n + \frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$ este injectivă. Fie (m,n) ≠ (m′,n′). Dacă m + n = m′+ n′, atunci din g(m,n) = g(m′,n′) ar rezulta că n = n′, după care avem m = m′, adică (m,n) = (m′,n′), ceea ce este contrar ipotezei. Deci g(m,n)≠g(m′,n′). Dacă m + n < m′+ n′, atunci m′ + n′ ≥ m + n + 1, de unde :

$$g(m',n') \geq \frac{(m+n+1)(m+n+2)}{2} + n' = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m + n + 1 + n' >$$

$$> \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n = g(m,n) \ .$$

Deci m+n<m′+n′ ⇒ g(m,n)<g(m′,n′) ⇒ g(m,n) ≠ g(m′,n′).

Observaţie. Funcţia g definită mai sus se numeşte *numărare diagonală.* Ea este de fapt şi surjecţie (vezi **[7,p.66]**), deci bijecţie, adică $\aleph_0^2 = \aleph_0$.

2.17. (i). Fie $A_n = \{a_0^n, a_1^n, \ldots, a_n^n, \ldots\}$, n=1,2,… o familie numărabilă de mulţimi numărabile disjuncte.

Funcţia f: $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \to ℕ×ℕ$ definită prin $f(a_i^j) = (i,j)$ este o bijecţie. Într-adevăr f este injectivă. Surjectivitatea este evidentă. Deci $|\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n| = |ℕ ×ℕ| = \aleph_0$.

Dacă familia nu este disjunctă, din cele de mai sus reiese că $|\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n| \leq \aleph_0$ şi deoarece $|\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n| \geq |A_n| = \aleph_0$ obţinem că afirmaţia (i) rămâne adevărată şi în acest caz .

(ii).Se procedează analog ca la (i).

(iii). Se obţine ca o consecinţă a lui (i) şi (ii).

(iv) Dacă A = $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, B = $\{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$, atunci A × B = $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$, unde $A_n = \{ (a_n, b_0), (a_n, b_1), \ldots, (a_n, b_m), \ldots\}$, care după (i) este o mulţime numărabilă.

Observație. Din (i) rezultă că :

$$n\cdot\aleph_0 = \underbrace{\aleph_0+\aleph_0+\ldots+\aleph_0}_{n\ \ ori}=\aleph_0$$

iar din (iv) (ca și din problema **2.16.)** avem $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.

De aici, ținând cont de asociativitatea produsului numerelor cardinale, vom avea:

$$\aleph_0^3 = (\aleph_0\cdot\aleph_0)\cdot\aleph_0 = \aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$$

și în general:

$$\aleph_0^n=\aleph_0,\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

2.18. (i). Funcția f : $\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ definită prin

$$f(z) = \begin{cases}2z, dac\breve{a}\ \ z\ge 0\\ -1-2z, dac\breve{a}\ \ z<0\end{cases}\quad \text{este o bijecție.}$$

Să arătăm mai întâi că f este injectivă.

Într-adevăr, fie $z_1, z_2 \in\mathbb{Z}$ cu $z_1 \neq z_2$. Dacă $z_1 \geq 0$ și $z_2 < 0$ atunci $f(z_1)$ este par, iar $f(z_2)$ este impar, deci $f(z_1) \neq f(z_2)$. Dacă $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$ atunci $f(z_1) \neq f(z_2)$ pentru că $2z_1 \neq 2z_2$. Dacă $z_1< 0$, $z_2 < 0$ atunci $-1\text{-}2z_1 \neq -1\text{-}2z_2$, deci $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Să arătăm acum că f este surjectivă. Dacă $n\in\mathbb{N}$ și $n = 2m$ atunci $n = f(m)$, iar dacă $n = 2m\text{-}1$ atunci $n = f(\text{-}m)$ unde $-m < 0$ pentru că $m > 0$.

(ii). Avem că $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ unde $A_1 = \{0, \pm1, \pm2,\ldots\}$, $A_2 = \{n/2 \mid n= 0, \pm1, \pm2,\ldots\}$, …, $A_m= \{n/m \mid n = 0, \pm1, \pm2,\ldots\}$,….

Deoarece fiecare din mulțimile A_m sunt numărabile, atunci $\mathbb{Q}$ este numărabilă (conform problemei **2.17.**(i)).

(iii). Deoarece $\mathbb{P}\subset\mathbb{N}$ avem $|\mathbb{P}|\leq\aleph_0$.

Pentru a demonstra că $|\mathbb{P}| = \aleph_0$ este suficient să arătăm că $\aleph_0 \leq |\mathbb{P}|$, adică $\mathbb{P}$ este infinită. Să presupunem prin absurd că $\mathbb{P}$ este finită, adică $\mathbb{P} = \{p_1,p_2, \ldots,p_n\}$.

Numărul natural $q = p_1p_2\ldots p_n + 1$ nu aparține lui $\mathbb{P}$ fiind mai mare decât p_k, $k = 1,2,\ldots,n$ şi este prim, căci nu este divizibil cu nici unul din numerele prime aparținând lui $\mathbb{P}$. Aceasta contrazice faptul că $\mathbb{P}$ conține toate numerele prime.

(iv). Mulțimea polinoamelor $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ cu coeficienții raționali $a_0, a_1,\ldots,a_n$ este reuniunea numărabilă a mulțimilor A_n, unde A_n este mulțimea polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n ($n\in\mathbb{N}^*$). Din problema **2.17.** (i)., este suficient să demonstrăm că fiecare din mulțimile A_n este numărabilă. Cazul $n = 0$ ($A_0 = \mathbb{Q}$) a fost studiat la (ii). Să presupunem că A_n este numărabilă şi să arătăm că A_{n+1} este de asemenea numărabilă.
Orice element din A_{n+1} este de forma $P(x) + a_{n+1}x^{n+1}$ unde $P\in A_n$, iar $a_{n+1} \in\mathbb{Q}$. Deci fiecărui element din A_{n+1} i se poate pune în corespondență un cuplu $(P(x), a_{n+1})\in A_n \times \mathbb{Q}$. Din problema **2.17.** (iv), rezultă că $|A_{n+1}| = \aleph_0$.

Folosind inducția matematică, rezultă că $|A_n| = \aleph_0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

(v). Deoarece fiecare polinom are un număr finit de rădăcini, din (iv) şi problema **2.17.** (iii). rezultă că mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

2.19. (i). Fie $b_1,c_1\in A$, apoi $b_2,c_2\in A \setminus \{b_1,c_1\}$; în continuare considerăm două elemente $b_3,c_3\in A\setminus\{b_1,b_2,c_1,c_2\}$, ş.a.m.d. Astfel obținem mulțimile numărabile $B' = \{b_1, b_2,\ldots, b_n,..\}$ şi $C = \{ c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots\}$. Se vede că $B = A \setminus C \supset B'$, de unde $A = B \cup C$.

(ii). Fără a particulariza putem admite că $X \cap A = \varnothing$. După (i) avem $A = B \cup C$, unde C este numărabilă, după care $A \cup X = B \cup (C \cup X)$, unde $C \cup X$ este tot numărabilă, ca reuniune a unei mulțimi numărabile cu una cel mult numărabilă.

Dacă X este numărabilă, avem $X \sim C \cup X$ şi deci $A \sim B$, după care $A \cup X \sim B \cup X \sim B \cup C = A$. Dacă $Y \subset X$ şi $|Y| < \aleph_0$, atunci:

$|A| \le |A \cup Y| \le |A \cup X| = |A|$, de unde $|A \cup Y| = |A|$.

Observație. Dacă în (ii) mulțimea X este numărabilă cu $A \cap X = \emptyset$, relația $A \cup X \sim A$ se mai poate scrie: $|A| + \aleph_0 = |A|$, adică $\aleph_0$ este *elementul neutru* față de operația de adunare a numerelor cardinale transfinite.

2.20. Deoarece $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\ x$ este bijectivă, este suficient să arătăm că intervalul (0, 1) nu este o mulțime numărabilă iar pentru aceasta să arătăm că orice funcție $f : \mathbb{N} \to (0,1)$ nu este surjectivă (*procedeul diagonal al lui Cantor*).

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ putem scrie pe f (n) ca fracție zecimală: $f(n) = 0, a_{n1}\, a_{n2} \ldots\ldots a_{nn} \ldots.$ cu $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Dacă vom considera $b \in (0,1)$, $b = 0, b_1\, b_2 \ldots.b_n \ldots$ unde pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ $b_k \notin \{0, 9, a_{kk}\}$, atunci $b \notin Im(f)$, adică f nu este surjectivă.

2.21. (i). Funcția $f : [0,1] \to [a,b]$ definită prin $f(x) = a + x(b-a)$ este o bijecție, deci $[0,1] \sim [a,b]$, oricare ar fi $a,b \in \mathbb{R}$. Deci și $[0,1] \sim [c,d]$. Folosind proprietățile de simetrie și tranzitivitate ale relației de echipotență, obținem în final că $[a,b] \sim [c,d]$. Analog se arată $(a,b) \sim (c,d)$ (ambele mulțimi fiind echivalente cu (0,1)).

(ii). Folosind (ii) din problema **2.19.** în care se ia A=(a,b) iar X = {a}, obținem $[a,b) = A \cup X \sim A = (a,b)$.

Analog se deduc și celelalte echivalențe.

(iii). $[a,b) \sim (0,1) \sim (c,d) \sim [c,d]$;

(iv). Funcția $f: [0,\infty) \to [0,1)$ definită prin $f(x) = \frac{x}{x+1}$ este o bijecție. Deci $[0,\infty) \sim [0,1)$. Dar $[0,1) \sim [0,1] \sim [a,b]$ și deci $[0,\infty) \sim [a,b]$. Avem evident că $[0,\infty) \sim (-\infty,0]$, bijecția între cele două mulțimi fiind asigurată de funcția $g(x) = -x$.

(v). Funcţia tg x este o bijecţie de la $(-\pi/2, \pi/2)$ la $\mathbb{R}$. Deci $\mathbb{R} \sim (-\pi/2, \pi/2)$. Din (i) avem că $(-\pi/2,\pi/2) \sim (a,b)$ ceea ce în final implică că $\mathbb{R} \sim (a,b)$.

2.22. Se observă că funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definită prin $f(n) = 2n$ este o injecţie nesurjectivă. Deci $\mathbb{N} \sim f(\mathbb{N}) \subsetneq \mathbb{N}$, ceea ce arată că $\mathbb{N}$ nu este finită, fiind echipotentă cu o parte strictă a sa.

2.23. Cum $\mathbb{N}$ este infinită (conform problemei **2.22.**) rezultă (conform problemei **2.4.**) că şi M este infinită .

Reciproc, dacă M este infinită atunci recursiv se construieşte o funcţie injectivă $f : \mathbb{N} \to M$.

2.24. Un număr cardinal α este natural dacă şi numai dacă $\aleph_0 \not\leq \alpha$, deci conform problemei **2.15.** dacă şi numai dacă $\alpha < \aleph_0$.

2.25. (i). Din problema **2.21.** avem că $|[a,b)| = |(a,b]| = |(a,b)| = |[a,b]| = |\mathbb{R}| = c$.

(ii). Folosind problema **2.9.** şi faptul că $\mathbb{Q}$ este numărabilă avem că $\mathbb{R} = I \cup \mathbb{Q} \sim I$, adică $|I| = |\mathbb{R}| = c$.

(iii). Analog, $\mathbb{R} = A \cup T \sim T$, deoarece mulţimea A a numerelor algebrice este numărabilă.

(iv). Deoarece $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ conţine funcţiile constante avem că $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \geq \aleph_0$. Să presupunem că $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ este numărabilă, adică $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}$.

Fie funcţia $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definită prin $g(n) = b_n$, unde $b_n = 1 + a_n^n$, iar $a_n^n = f_n(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Evident $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Deci există $n \in \mathbb{N}$ cu $g = f_n$. În particular, $g(n) = f_n(n)$, adică $1 + a_n^n = a_n^n$ ceea ce este absurd.

Observaţie. Din (iv). obţinem că $\aleph_0^{\aleph_0} = c$.

2.26. (i). Fie $A_1,\ldots, A_n$ mulțimi de puterea continuului, disjuncte două câte două, iar $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ numere reale. Din problema **2.25.** (i). rezultă că:

$$A_1 \sim [a_1,a_2),\ A_2 \sim [a_2,a_3),\ \ldots,\ A_n \sim [a_n,a_{n+1}),$$

iar din problema **2.14.** obținem că $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \sim [a_1,a_{n+1})$, ceea ce după problema **2.25.**, (i). înseamnă că $|\bigcup_{k=1}^{n} A_k| = |[a_1,a_{n+1})| = c$.

(ii). Fie $A_1,\ldots,A_n,\ldots$ o familie numărabilă şi disjunctă de mulțimi de puterea continuului. Fie $a_n = 2-\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Procedând analog ca la (i) avem că $A_n \sim [a_n,a_{n+1})$ şi deci $\bigcup_n A_n \sim [1,2)$, adică $|\bigcup_n A_n| = c$.

(iii).Fie A, B cu $|A| = |B| = c$. Din problema **2.25.** (iv) rezultă că există bijecțiile $f : A \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $g : B \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Deci pentru fiecare $a\in A$, $b\in B$ fixate, există f_a, $g_b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Definim $h : A \times B \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ astfel: $h_{(a,b)}(n) = f_a(p)$ dacă $n = 2p$ şi $h_{(a,b)}(n) = g_b(p)$ dacă $n = 2p+1$, adică $h_{(a,b)}$ este şirul : $f_a(0)$, $g_b(0)$, $f_a(1)$, $g_b(1)$, …,$f_a(p)$, $g_b(p)$,…

Să arătăm că h este injectivă. Fie $(a,b) \neq (a',b')$. Dacă $h_{(a,b)} = h_{(a',b')}$ ar rezulta că pentru orice p avem $f_a(p) = f_{a'}(p)$ şi $g_b(p) = g_{b'}(p)$, ceea ce în baza injectivității lui f, g conduce la $a = a'$, $b = b'$. Deci am ajuns la contradicție care arată că h este injectivă.

Să arătăm că h este surjectivă. Fie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, iar $v_n = u_{2n}$ şi $w_n = u_{2n+1}$, pentru $n\in\mathbb{N}$. Deoarece f,g sunt surjective există $a\in A$, $b\in B$ a.î. $f_a= (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $g_b = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Evident $h_{(a,b)} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Deci $A \times B \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, adică $|A \times B| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = c$.

Observație. Din (i) se deduce că $n \cdot c = \underbrace{c + c + \ldots + c}_{n\ \ ori} = c$

iar din (ii) că $\aleph_0 \cdot c = c$.

Proprietatea (iii) arată că $c \cdot c = c$ de unde rezultă că :

$$c^3 = (c \cdot c) \cdot c = c \cdot c = c$$

şi în general: $c^n = c$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2.27. (i). Dacă A este finită atunci F(A) = P(A) şi din problema **2.12.** rezultă că avem $|F(A)| = |P(A)| = 2^{|A|} > |A|$. Deoarece $N(A) = \varnothing$ avem $|N(A)| = 0$.

(ii). Fie $F_n(A) = \{X \mid X \subset A,\ |X| = n\}$. Evident, $F(A) = \bigcup\limits_n F_n(A)$. Avem că $\aleph_0 = |A| \leq |F_n(A)| \leq |\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n\ ori}| =$

$= |A^n| = \aleph_0^n = \aleph_0$ (pentru $n \geq 1$) şi deci $|F_n(A)| = |A| = \aleph_0$.

Din problema **2.17.** (i) rezultă că $|F(A)| = \aleph_0$.

De aici se vede că $N(A) \sim N(A) \cup F(A) = P(A)$.

Deci $|N(A)| = |P(A)| = 2^{|A|} = 2^{\aleph_0} = c$.

(iii). Procedând analog ca la (ii) se obține $|F_n(A)| = |A| = c$, şi de aici rezultă că $|F(A)| = c$. Din definiția şi proprietățile operației de exponențiere a numerelor cardinale avem: $|N(A)| = |A^{\mathbb{N}}| = c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$.

Din problema **2.12.** (i), $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^c > c$.

2.28. (i). Avem că $|P(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} = c$.

(ii). Analog, $|P(\mathbb{R})| = 2^{|\mathbb{R}|} = 2^c$.

(iii). Din proprietățile operațiilor cu numerele cardinale $\aleph_0$ şi c avem:

$$|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = c^c = (2^{\aleph_0})^c = 2^{\aleph_0 \cdot c} = 2^c.$$

Observație. Mai sus am obținut că $2^{\aleph_0} = c < 2^c = c^c$, deci mulțimea funcțiilor reale de argument real $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ are cardinalul mai mare decât puterea continuului.

2.29. (i). Rezultă din problema problema **2.17.** (i).

(ii). Rezultă din problema **2.17.** (i) şi (iv).

(iii). $c^2 = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$.

(iv). $c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0}$, de unde aplicând (ii) deducem că $c^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$.

(v). Din problema **2.13.**, cum $2 < c$ obținem că $c+c \leq c^2 = c$.

Pe de altă parte, cum $c \leq c + c$ şi ținând cont de (iii), deducem că $c \leq c + c \leq c$, deci $c = c + c$.

(vi). Din inegalitățile $2 < \aleph_0 < c$ şi din problema **2.6.** obținem că $2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq c^{\aleph_0}$, de unde $c \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq c$, adică $\aleph_0^{\aleph_0} = c$.

(vii). Tot din inegalitățile $2 < \aleph_0 < c$ şi ținând cont de problema **2.5.** (vii) deducem că $c = 2 \cdot c \leq \aleph_0 \cdot c \leq c^2 = c$, de unde $\aleph_0 \cdot c = c$.

§ 3. Relații de preordine(ordine). Elemente speciale într-o mulțime ordonată.

3.1. (i). Dacă m, n, $p\in\mathbb{N}$ atunci în mod evident $m|m$, dacă $m\ |n$ şi $n\ |m$ atunci $m = n$ iar dacă $m|n$ şi $n|p$ atunci $m|p$, adică $(\mathbb{N},|\ )$ este o mulțime ordonată.

(ii). Deoarece pentru orice $n\in\mathbb{N}$ avem $1|n$ şi $n|0$ deducem că 1 joacă rolul lui **0** şi 0 joacă rolul lui **1**.

(iii). Relația de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$ este doar reflexivă şi tranzitivă (adică este o ordine parțială pe $\mathbb{Z}$), fără a fi antisimetrică (deoarece, de exemplu $1|-1$ şi $-1|1$ dar $1\neq-1$!).

(iv). Elementele minimale ale lui M sunt numerele prime.

(v). Răspunsul este negativ deoarece în cazul elementelor 2 şi 3 nu avem $2|3$ şi nici $3|2$.

3.2. (i). Dacă $A,B,C\in P(M)$, atunci în mod evident avem $A \subseteq A$, dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$ atunci $A = B$, iar dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$, atunci $A \subseteq C$, de unde concluzia că $(P(M), \subseteq)$ este o mulțime ordonată. Deoarece pentru orice $A\in P(M)$ avem $\varnothing \subseteq A \subseteq M$ deducem că **0** $= \varnothing$ şi **1** $= M$.

(ii). Răspunsul este negativ deoarece alegând două elemente $a,b\in M$ cu $a \neq b$, atunci nu avem $\{a\} \subseteq \{b\}$ şi nici $\{b\}\subseteq\{a\}$(se subînțelege condiția ca M să aibă cel puțin două elemente !).

3.3. Demonstrăm că $\leq$ este o relație de ordine :

- *reflexivitatea* : $m \leq m$ evident, deoarece $m = m + 0$.

- *antisimetria:* $m \leq n$ şi $n \leq m$ arată că există $p, s\in\mathbb{N}$ a.î. $n = m + p$ şi $m = n + s$. Deci $n = n + p + s$ şi cum $(\mathbb{N},+)$ este un monoid cu proprietatea de simplificare, rezultă că $p + s = 0$, de unde rezultă că $p = s = 0$, adică $m = n$.

- *tranzitivitatea*: fie $m \leq n$ şi $n \leq p$; atunci există $s,t\in\mathbb{N}$ a.î. $n = m + s$ şi $p = n + t$, deci $p = m + (s + t)$, ceea ce arată că $m \leq p$.

Pentru a arăta că ordinea $\leq$ este totală, fie $m\in\mathbb{N}$ fixat şi mulțimea :

$$P_m = \{n\in\mathbb{N} \mid n \leq m \text{ sau } m \leq n \} \subseteq \mathbb{N}.$$

În mod evident $0\in P_m$ şi fie $n\in P_m$. Dacă $n = m$, atunci cum $n < s(n)$ avem $m < s(n)$, adică $s(n) \in P_m$. Dacă $n < m$, atunci $s(n) \leq m$ şi din nou $s(n)\in P_m$. Dacă $m < n$, cum $n < s(n)$ avem că $m < s(n)$ şi din nou $s(n)\in P_m$. Rezultă că $P_m = \mathbb{N}$ şi cum m este oarecare deducem că ordinea de pe $\mathbb{N}$ este totală.

3.4. Trebuie să demonstrăm că orice submulțime nevidă $A \subseteq \mathbb{N}$ are un cel mai mic element. Pentru aceasta fie:

$$P = \{ n\in\mathbb{N} \mid n \leq x, \text{ pentru orice } x\in A\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Evident $0\in P$. Dacă pentru orice $n\in P$ ar rezulta $s(n) \in P$, atunci am deduce că $P = \mathbb{N}$, astfel că alegând un $x_0\in A$ atunci $x_0\in P$, deci $s(x_0)\in P$. În particular ar rezulta că $s(x_0) \leq x_0$ – absurd !.

Deducem că $P \neq \mathbb{N}$, adică există $a\in P$ a.î. $s(a)\notin P$. Vom demonstra că $a\in A$ şi că a este cel mai mic element al lui A.

Dacă $a\notin A$, atunci pentru orice $x\in A$ avem $a < x$, de unde $s(a) \leq x$, adică $s(a) \in P$ – absurd!. Deci $a\in A$ şi cum $a\in P$ deducem că $a \leq x$ pentru orice $x\in A$, adică a este cel mai mic element al lui A.

3.5. Fie $x\in M$. Deoarece $x \leq x$ iar $x\in[x]_\rho$ deducem că $[x]_\rho \leq [x]_\rho$, adică relația $\leq$ de pe M/ρ este reflexivă .

Dacă $x,y,z\in M$ şi $[x]_\rho \leq [y]_\rho$, $[y]_\rho \leq [z]_\rho$ atunci există $x'\in[x]_\rho$, $y'\in [y]_\rho$ a.î. $x' \leq y'$ şi $y''\in[y]_\rho$, $z'\in[z]_\rho$ a.î. $y'' \leq z'$. Cum $y \,\rho\, y'$, $y \,\rho\, y''$ şi $y \leq y \Rightarrow y' \leq y''$ şi $y'' \leq y'$. Din $x' \leq y'$ şi $y' \leq y''$ deducem că $x' \leq y''$ şi cum $y'' \leq z' \Rightarrow x' \leq z'$, adică $[x]_\rho \leq [z]_\rho$, deci relația $\leq$ de pe M/ρ este tranzitivă.

Dacă $x,y \in M$ şi $x \leq y$, cum $x \in [x]_\rho$ şi $y \in [y]_\rho$ deducem că $p_M(x) \leq p_M(y)$, adică p_M este izotonă.

3.6. Vom considera pe M relaţia $x \rho y \Leftrightarrow x \leq y$ şi $y \leq x$. Se verifică imediat că ρ este o relaţie de echivalenţă pe M compatibilă cu $\leq$.

Alegem $\overline{M} = M/\rho$ şi $p_M : M \to \overline{M}$ surjecţia canonică (care este izotonă). Să arătăm că relaţia de preordine cât $\leq$ (definită în cadrul problemei **3.5.**) este o relaţie de ordine (adică mai trebuie să arătăm că este şi antisimetrică).

Fie $x,y \in M$ a.î. $[x]_\rho \leq [y]_\rho$ şi $[y]_\rho \leq [x]_\rho$. Atunci există $x' \in [x]_\rho$, $y' \in [y]_\rho$ a.î. $x' \leq y'$ şi $y'' \in [y]_\rho$, $x'' \in [x]_\rho$ a.î. $y'' \leq x''$. Mai avem de asemenea inegalităţile : $x \leq x'$, $x' \leq x$, $y' \leq y$ şi $y \leq y'$, $x'' \leq x$ şi $x \leq x''$, $y'' \leq y$ şi $y \leq y''$.

Din şirul de inegalităţi : $x \leq x'$, $x' \leq y'$ şi $y' \leq y$ deducem că $x \leq y$, iar din $y \leq y''$, $y'' \leq x''$ şi $x'' \leq x$ deducem că $y \leq x$, adică $[x]_\rho = [y]_\rho$.

Fie acum $g : M \to N$ o aplicaţie izotonă. Definim $\overline{g} : \overline{M} \to N$ prin $\overline{g}([x]_\rho) = g(x)$. Aplicaţia $\overline{g}$ este bine definită deoarece dacă $[x]_\rho = [y]_\rho \Rightarrow x \leq y$ şi $y \leq x$. Cum g este izotonă deducem că $g(x) \leq g(y)$ şi $g(y) \leq g(x)$ şi cum N este o mulţime ordonată rezultă că $g(x) = g(y)$. În mod evident $\overline{g}$ este izotonă şi $\overline{g} \circ p_M = g$. Unicitatea lui $\overline{g}$ rezultă din faptul că p_M este surjecţie.

3.7. Fie $S \subseteq A$ a.î. există inf(S). Fie $M \subseteq A$ mulţimea majoranţilor lui S iar $m = \inf(M)$. Cum pentru orice $x \in S$ şi $y \in M$ avem $x \leq y$ deducem că $x \leq m$, adică $m \in M$, astfel că $m = \sup(S)$. Implicaţia inversă rezultă prin dualizare.

3.8. Evident $x \leq x$, $(\forall)$ $x \in P$, adică $\leq$ este reflexivă. Dacă $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in P$, $x \leq y$ şi $y \leq x$, atunci $(\exists)$ $1 \leq s, k \leq n$ a.î. $x_1 = y_1, \ldots, x_s = y_s$ şi $x_{s+1} < y_{s+1}$, respectiv $y_1 = x_1, \ldots, y_k = x_k$ şi $y_{k+1} < x_{k+1}$. Vom demonstra că $s = k = n$. Dacă $s = k$ atunci nu putem avea $s = k < n$ deoarece am avea $x_{s+1} < y_{s+1}$ şi $y_{s+1} < x_{s+1}$-

absurd. Dacă $s < k$ atunci $s+1 \leq k$ deci din $x \leq y$ avem $x_{s+1} < y_{s+1}$ iar din $y \leq x$ ar trebui ca $x_{s+1} = y_{s+1}$- absurd. Analog se arată că nu putem avea $k < s$, de unde $k = s$ şi conform celor de mai înainte $k = s = n$, adică $x = y$.

Dacă $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, $z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \in P$ a.î. $x \leq y$ şi $y \leq z$, atunci $(\exists)$ $1 \leq s, k \leq n$ a.î. $x_1 = y_1, \ldots, x_s = y_s$ şi $x_{s+1} < y_{s+1}$, respectiv $y_1 = z_1, \ldots, y_k = z_k$ şi $y_{k+1} < z_{k+1}$. Luând $r = \min(s,k)$ obţinem că $x_1 = y_1 = z_1, \ldots, x_r = y_r = z_r$ iar $x_{r+1} = y_{r+1} < z_{r+1}$ (dacă $r = k$) sau $x_{r+1} < y_{r+1} = z_{r+1}$ (dacă $r = s$). Astfel rezultă că $x \leq z$, deci relaţia $\leq$ este tranzitivă.

Din cele demonstrate rezultă că $(P, \leq)$ este o mulţime ordonată.

3.9. (i). Evident $x \leq x$, $(\forall)$ $x = (x_i)_{i \in I} \in P$ deoarece $x_i \leq x_i$, $(\forall)$ $i \in I$.

Fie $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$, astfel încât $x \leq y$ şi $y \leq x$. Atunci $x_i \leq y_i$ şi $y_i \leq x_i$, $(\forall)$ $i \in I$ şi deoarece fiecare P_i este o mulţime ordonată rezultă că $x_i = y_i$, $(\forall)$ $i \in I$, adică $x = y$.

Fie $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$, $z = (z_i)_{i \in I} \in P$ a.î. $x \leq y$ şi $y \leq z$. Atunci $x_i \leq y_i$ şi $y_i \leq z_i$, $(\forall)$ $i \in I$ şi deoarece fiecare P_i este o mulţime ordonată rezultă că $x_i \leq z_i$, $(\forall)$ $i \in I$, adică $x \leq z$.

Astfel, mulţimea $(P, \leq)$ este ordonată.

Dacă $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I} \in P$ a.î. $x \leq y$, atunci $x_i \leq y_i$, $(\forall)$ $i \in I$ şi cum $p_i(x) = x_i$ iar $p_i(y) = y_i$ rezultă că $p_i(x) \leq p_i(y)$, $(\forall)$ $i \in I$, adică proiecţiile p_i sunt izotone.

(ii). Din proprietatea de universalitate a produsului direct pentru familia $(P_i)_{i \in I}$ (considerate doar ca mulţimi) există o unică funcţie $u : P' \to P$ a.î. $p_i \circ u = p_i'$, oricare ar fi $i \in I$, şi anume $u(x) = (p_i'(x))_{i \in I}$. Mai trebuie să demonstrăm că u este izotonă. Fie $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$ a.î. $x \leq y$, deci $x_i \leq y_i$, $(\forall)$ $i \in I$ şi din modul de definire al lui u rezultă că $u(x) \leq u(y)$, adică u este izotonă.

3.10. Răspunsul este negativ, contraexemplul fiindu-ne oferit de $[0,1] \times [0,1]$ cu ordinea produs: $(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow a \leq c$ şi

$b \le d$ ($\le$ fiind ordinea naturală de pe $\mathbb{R}$). Se observă că (0,1) şi (1,0) sunt incomparabile.

3.11. (i). Reflexivitatea şi simetria sunt imediate. Dacă $(x,i) \le (y,j)$ şi $(y,j) \le (z,k)$ atunci $i = j = k$ şi $x \le y$, $y \le z$, de unde $x \le z$, adică $(x,i) \le (z,k)$. Deci $\le$ este şi tranzitivă, adică este o relaţie de ordine pe S.

Dacă $x,y \in P_i$ şi $x \le y$, atunci $(x,i) \le (y,i) \Rightarrow \alpha_i(x) \le \alpha_i(y)$, deci α_i este izotonă.

(ii). Se verifică imediat că $u : S \to S'$, $u((x,i)) = \alpha_i'(x)$ este izotonă şi verifică condiţia de universalitate din enunţ.

3.12. (i). Reamintim că $S = \{ (x,i) \mid x \in P_i, i \in I\}$ iar $\alpha_i : P_i \to S$, $\alpha_i(x) = (x,i)$.

Este evident că $(x,i) \le (x,i)$, $(\forall)$ $(x,i) \in S$.

Dacă (x,i), $(y,j) \in S$ a.î. $(x,i) \le (y,j)$ şi $(y,j) \le (x,i)$ atunci avem posibilităţile:

1. $i < j$ care face ca a doua inegalitate să fie imposibilă;
2. $i = j$ care implică $x \le y$ şi $y \le x$, deci $x = y$ (deoarece mulţimea P_i este ordonată).

Dacă (x,i), (y,j), $(z,k) \in S$ a.î. $(x,i) \le (y,j)$ şi $(y,j) \le (z,k)$, atunci avem posibilităţile:

1. $i < j$ şi $j < k \Rightarrow i < k$ (deoarece I este ordonată)$\Rightarrow (x,i) \le (z,k)$;
2. $i < j$, $j = k$ şi $y \le z \Rightarrow i < k$ şi astfel $(x,i) \le (z,k)$;
3. $i = j$, $x \le y$ şi $j < k \Rightarrow i < k \Rightarrow (x,i) \le (z,k)$;
4. $i = j$, $x \le y$, $j = k$ şi $y \le z \Rightarrow i = k$ şi $x \le z \Rightarrow (x,i) \le (z,k)$.

Am demonstrat astfel că $(S, \le)$ este o mulţime ordonată.

Fie $x,y \in P_i$, $x \le y \Rightarrow (x,i) \le (y,i) \Rightarrow \alpha_i(x) \le \alpha_i(y)$, deci injecţiile canonice sunt funcţii izotone.

(ii). Folosind proprietatea de universalitate a sumei directe a unei familii de mulţimi deducem existenţa şi unicitatea unei funcţii $u : S \to S'$ a.î. $u \circ \alpha_i = \alpha_i'$, $(\forall)$ $i \in I$ (u se defineşte prin $u((x,i)) = \alpha_i'(x)$, $(\forall)$ $i \in I$). Mai trebuie să demonstrăm că u este izotonă.

Fie (x,i), $(y,j) \in S$ a.î. $(x,i) \le (y,j)$. Dacă $i < j$, cum din ipoteză orice element din $\alpha_j'(P_j)$ este majorant pentru $\alpha_i'(P_i)$ deducem că $\alpha_i'(x) \le \alpha_j'(y)$, adică $u((x,i)) \le u((y,j))$. Dacă $i = j$ şi $x \le y \Rightarrow \alpha_i'(x) \le \alpha_i'(y) \Rightarrow u((x,i)) \le u((y,i))$. Deci u este izotonă.

3.13. Este evident că $f \le f$, $(\forall)$ $f \in Hom(A,P)$ deoarece P este o mulţime ordonată şi deci $f(x) \le f(x)$, $(\forall)$ $x \in A$.

Dacă $f,g \in Hom(A, P)$ a.î. $f \le g$ şi $g \le f$, atunci $f(x) \le g(x)$ şi $g(x) \le f(x)$, $(\forall)$ $x \in A$, şi astfel, cum P este mulţime ordonată, deducem că $f(x) = g(x)$, $(\forall)$ $x \in A$, deci $f = g$.

Dacă $f, g, h \in Hom(A, P)$ a.î. $f \le g$ şi $g \le h$, atunci $f(x) \le g(x)$ şi $g(x) \le h(x)$, oricare ar fi $x \in A$, de unde $f(x) \le h(x)$, $(\forall)$ $x \in A$, adică $f \le h$.

Deci, rezultă că Hom(A, P) este o mulţime ordonată.

3.14. Faptul că $(M', f) \le (M', f)$ este evident.

Dacă $(M_1, f_1), (M_2, f_2) \in \mathbf{P}$ a.î. $(M_1, f_1) \le (M_2, f_2)$ şi $(M_2, f_2) \le$ $\le (M_1, f_1)$, atunci $M_1 \subseteq M_2$ şi $f_{2|M_1} = f_1$ şi $M_2 \subseteq M_1$ şi $f_{1|M_2} = f_2$. Atunci $M_1 = M_2$ şi $f_1 = f_2$, deci $(M_1, f_1) = (M_2, f_2)$.

Dacă $(M_1, f_1), (M_2, f_2), (M_3, f_3) \in \mathbf{P}$ a.î. $(M_1, f_1) \le (M_2, f_2)$ şi $(M_2, f_2) \le (M_3, f_3) \Rightarrow M_1 \subseteq M_2$ şi $f_{2|M_1} = f_1$ şi $M_2 \subseteq M_3$ şi $f_{3|M_2} = f_2$. Atunci $M_1 \subseteq M_3$ şi $f_{3|M_1} = f_1$, deci $(M_1, f_1) \le (M_3, f_3)$.

Astfel, $(\mathbf{P}, \le)$ este o mulţime ordonată.

3.15. (i). Fie $A \subseteq M$ şi $\inf A = a$. Atunci $a \le x$, $(\forall)$ $x \in A$ şi cum f este izotonă rezultă că $f(a) \le f(x)$, $(\forall)$ $x \in A$, deci $f(a) \le \inf \{f(x) / x \in A\} = \inf (f(A))$.

Prin dualizare obţinem şi cealală inegalitate.

Fie $M = N = \mathbb{R}$ cu ordinea naturală şi $A = (a,b) \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \le a \\ x, & x \in (a,b) \\ x+1, & x \ge b \end{cases}.$$

Atunci f este o funcție izotonă. Avem inf A = a, sup A = = b, f(A)=(a,b) iar f(a) = a-1 şi f(b) = b+1. Atunci a -1=f(inf A) < < inf(f(A)) = a şi b = sup(f(A)) < f(sup(A)) = b + 1.

(ii). Dacă f este izomorfism de ordine, atunci f este o bijecție. Fie $b \in N$ a.î. $b \le f(x)$, pentru orice $x \in A$. Cum f este bijectivă, $b = f(x_0)$ cu $x_0 \in M$. Din $f(x_0) \le f(x)$ şi faptul că f este izomorfism de ordine, deducem că $x_0 \le x$, pentru orice $x \in A$, adică $x_0 \le a \Rightarrow b = f(x_0) \le f(a)$, adică f(a) = inf (f(A)). Analog pentru supremum.

3.16. Fie $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq M$ şi $m = \inf\{f(x_i) : i \in I\}$. Vom demonstra că $g(m) = \inf\{x_i : i \in I\}$.

Avem că $m \le f(x_i)$, $(\forall)\ i \in I \Rightarrow g(m) \le g(f(x_i)) = x_i$, deci $g(m) \le x_i$, $(\forall) i \in I$.

Fie $m' \in M$ a.î. $m' \le x_i$, $(\forall)\ i \in I$. Atunci $f(m') \le f(x_i)$, $(\forall)\ i \in I$, deci $f(m') \le m$, de unde rezultă că $g(f(m')) \le g(m) \Rightarrow m' \le g(m)$, adică $\inf\{x_i : i \in I\} = g(m)$.

Pentru supremum se demonstrează prin dualizare.

3.17. Fie $(P_i)_{1\le i\le n}$ o familie finită de mulțimi total ordonate şi mulțimea $P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$ ordonată cu ordinea lexicografică (vezi problema **3.8.**). Fie $x = (x_i)_{1\le i\le n}$, $y = (y_i)_{1\le i\le n} \in P$ şi considerăm că fiecare P_i este o mulțime total ordonată. Atunci $x_1 \le y_1$ sau $y_1 \le x_1$.Studiem doar primul caz, celălalt rezolvându-se analog. Dacă $x_1 < y_1$ avem că $x < y$ iar în dacă $x_1 = y_1$ se merge mai departe şi se observă relația de ordine dintre x_2 şi y_2 în situația în care P_2 este total ordonată. Dacă $x_2 < y_2$ atunci $x \le y$ iar dacă $y_2 = x_2$ se continuă procedeul. Deci P este o mulțime total ordonată.

§4. Latici.

4.1. (i). Din $a \le b$ rezultă că $a \wedge c \le b \wedge c$, $a \vee c \le b \vee c$.

(ii). Din $b, c \le b \vee c$ deducem că $a \wedge b, a \wedge c \le a \wedge (b \vee c)$, de unde $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \le a \wedge (b \vee c)$.

(iii). Din $b \wedge c \le b, c$ deducem că $a \vee (b \wedge c) \le a \vee b$, $a \vee c$, deci $a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

(iv). Avem $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \le b \wedge (a \vee c)$ (conform cu (ii)), de unde $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \le (b \wedge (a \vee c)) \vee (c \wedge a) \le$
$\le ((c \wedge a) \vee b) \wedge ((c \wedge a) \vee (a \vee c))$ (conform cu (ii)) $=$
$= ((c \wedge a) \vee b) \wedge (a \vee c) \le (c \vee b) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (conform cu (ii)).

(v). Avem $a \wedge b \le a$ iar $a \wedge c \le b \vee (a \wedge c)$, de unde $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \le a \wedge (b \vee (a \wedge c))$.

4.2. Cum în orice latice, dacă $c \le a$, atunci $(a \wedge b) \vee c \le$
$\le a \wedge (b \vee c)$, echivalența (i) $\Leftrightarrow$ (ii) este imediată.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Rezultă din aceea că $a \wedge c \le c$.

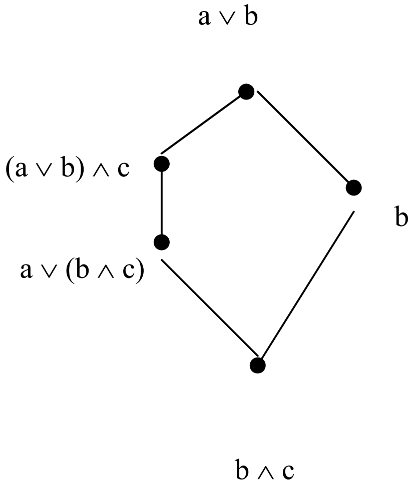
(iii) $\Rightarrow$ (i). Fie $a, b, c \in L$ a.î. $a \le c$. Atunci $a = a \wedge c$, deci $(a \vee b) \wedge c = ((a \wedge c) \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$.

(i) $\Rightarrow$ (iv). Avem $a = a \vee (a \wedge b) = a \vee (c \wedge b) = a \vee (b \wedge c)$
$= (a \vee b) \wedge c = (c \vee b) \wedge c = c$.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Evident.

(v) $\Rightarrow$ (i). Să presupunem că L nu satisface (i). Există atunci a, b, c în L a.î. $a \le c$, iar $a \vee (b \wedge c) \ne (a \vee b) \wedge c$. Să observăm că $b \wedge c < a \vee (b \wedge c) < (a \vee b) \wedge c < a \vee b$, $b \wedge c < b <$
$< a \vee b$, $a \vee (b \wedge c) \not\le b$ şi $b \not\le (a \vee b) \wedge c$.

Obținem în felul acesta diagrama Hasse a unei sublatici a lui L izomorfă cu $\mathbf{N_5}$:



(observând şi că $(a \vee (b \wedge c)) \vee b = a \vee ((b \wedge c) \vee b) = a \vee b$ şi $((a \vee b) \wedge c) \wedge b = ((a \vee b) \wedge b) \wedge c = b \wedge c$), ceea ce este absurd.

4.3. (i) $\Rightarrow$ (ii). Din (i), $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = ((a \vee b) \wedge a) \vee$ $\vee ((a \vee b) \wedge c) = a \vee (c \wedge (a \vee b)) =$ (cu (i)) $= a \vee ((c \wedge a) \vee$ $\vee (c \wedge b)) = a \vee (c \wedge a) \vee (c \wedge b) = a \vee (c \wedge b) = a \vee (b \wedge c)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Analog.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Rezultă din aceea că pentru oricare elemente $a, b, c \in L$, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$.

(i) $\Rightarrow$ (iv). Considerăm că L satisface (i) şi fie $a, b, c \in L$. Atunci :

$(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = (((a \vee b) \wedge b) \vee ((a \vee b) \wedge c)) \wedge$ $\wedge (c \vee a) = (b \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))) \wedge (c \vee a) = (b \vee (a \wedge c)) \wedge$

$\wedge (c \vee a) = (b \wedge (c \vee a)) \vee ((a \wedge c) \wedge (c \vee a)) = ((b \wedge c) \vee (b \wedge a)) \vee$
$\vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Deducem imediat că L este modulară, deoarece dacă $a, b, c \in L$ şi $a \leq c$, $(a \vee b) \wedge c = (a \vee b) \wedge ((b \vee c) \wedge c) =$
$= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) =$
$= (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee a = ((a \wedge b) \vee a) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c)$. Cu această observaţie, distributivitatea lui L se deduce astfel:

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge (a \vee b)) \wedge (b \vee c) = ((a \wedge (c \vee a)) \wedge (a \vee b) \wedge$
$\wedge (b \vee c) = a \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = a \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee$
$\vee (c \wedge a)) = (a \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c))) \vee (c \wedge a) =$ (datorită modularităţii) $= (a \wedge (b \wedge c)) \vee (a \wedge b) \vee (c \wedge a) =$ (datorită modularităţii) $= (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

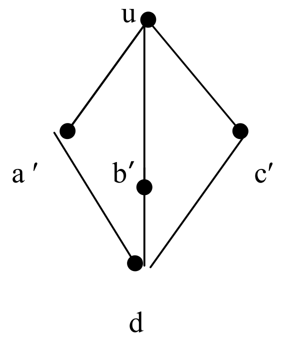
(i) $\Rightarrow$ (v). Dacă $a \wedge c = b \wedge c$ şi $a \vee c = b \vee c$, atunci
$a = a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) =$

$= b \wedge (a \vee c) = b \wedge (b \vee c) = b$.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Să admitem prin absurd că atât $\mathbf{N_5}$ cât şi $\mathbf{M_5}$ sunt sublatici ale lui L. În cazul lui $\mathbf{N_5}$ observăm că $b \wedge c =$
$= b \wedge a = \mathbf{0}$, $b \vee c = b \vee a = \mathbf{1}$ şi totuşi $a \neq c$ iar în cazul lui $\mathbf{M_5}$, $b \wedge a = b \wedge c = \mathbf{0}$, $b \vee a = b \vee c = \mathbf{1}$ şi totuşi $a \neq c$ - absurd!

(vi) $\Rightarrow$ (i). Conform problemei **4.2.**, dacă L nu are sublatici izomorfe cu $\mathbf{N_5}$ atunci ea este modulară. Cum pentru oricare $a, b, c \in L$ avem: $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$, să presupunem prin absurd că există $a, b, c \in L$ a.î. $(a \wedge b) \vee$
$\vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) < (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$. Notăm
$d = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$, $u = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$,
$a' = (d \vee a) \wedge u$, $b' = (d \vee b) \wedge u$ şi $c' = (d \vee c) \wedge u$.

Diagrama Hasse a mulțimii $\{d, a', b', c', u\}$ este



Cum $\{d, a', b', c', u\} \subseteq L$ este sublatice, dacă vom verifica faptul că elementele d, a', b', c', u sunt distincte, atunci sublaticea $\{d, a', b', c', u\}$ va fi izomorfă cu $\mathbf{M_5}$ ceea ce va fi contradictoriu cu ipoteza pe care o acceptăm.

Deoarece $d < u$, vom verifica egalitățile $a' \vee b' = b' \vee c' = c' \vee a' = u$, $a' \wedge b' = b' \wedge c' = c' \wedge a' = d$ şi atunci va rezulta şi că cele 5 elemente d, a', b', c', u sunt distincte.

Datorită modularității lui L avem: $a' = d \vee (a \wedge u)$, $b' = d \vee (b \wedge u)$, $c' = d \vee (c \wedge u)$ iar datorită simetriei este suficient să demonstrăm doar că $a' \wedge c' = d$.

Într-adevăr, $a' \wedge c' = ((d \vee a) \wedge u) \wedge ((d \vee c) \wedge u) = (d \vee a) \wedge (d \vee c) \wedge u = ((a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \vee a) \wedge (d \vee c) \wedge u = ((b \wedge c) \vee a) \wedge (d \vee c) \wedge u = ((b \wedge c) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c) \wedge (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a) = ((b \wedge c) \vee a) \wedge ((a \wedge b) \vee c) = (b \wedge c) \vee (a \wedge ((a \wedge b) \vee c)$ (datorită modularității) $= (b \wedge c) \vee (((a \wedge b) \vee c) \wedge a) = (b \wedge c) \vee ((a \wedge b) \vee (c \wedge a))$ (datorită modularității) $= d$.

4.4. Fie $(L, \leq)$ o mulţime total ordonată şi $x,y,z \in L$. Atunci între x,y,z există o anumită relaţie de ordonare, spre exemplu: $x \leq y \leq z$. Atunci $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \Leftrightarrow x \wedge z = x \vee x \Leftrightarrow x = x$, ceea ce este adevărat. Analog şi pentru celelalte cazuri.

4.5. Conform problemei **3.1.** din paragraful anterior, relaţia de divizibilitate este o relaţie de ordine de pe $\mathbb{N}$. Elementul **0** în acest caz este $1 \in \mathbb{N}$ deoarece $1 | n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, iar elementul **1** este $0 \in \mathbb{N}$, deoarece $n | 0$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Arătăm că $\inf\{m,n\} = (m,n)$ (c.m.m.d.c. al elementelor m şi n) iar $\sup\{m,n\} = [m,n]$ (c.m.m.m.c. al elementelor m şi n).

Fie $(m,n) = d$. Evident $d | m$ şi $d | n$ iar dacă $d' | m$ şi $d' | n$, conform definiţiei c.m.m.d.c., $d | d'$. Deci $m \wedge n = (m,n)$.

Analog pentru supremum.

Pentru distributivitate trebuie să arătăm, spre exemplu, că:

$(m, [n, p]) = [(m, n), (m, p)]$, oricare ar fi $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Folosim descompunerea în factori primi a numerelor m ,n, p:

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_t^{\alpha_t}, \ n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_t^{\beta_t}, \ p = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_t^{\gamma_t},$$

cu $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,..,t$ ($p_1,\ldots,p_t$ fiind numerele prime ce apar în descompunerea lui m, n, p, atunci când nu apar completându-se cu exponenţi nuli). Relaţia de demonstrat se reduce la:

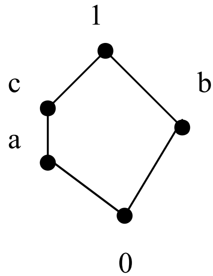
$\min (\alpha_i, \max (\beta_i,\gamma_i)) = \max (\min (\alpha_i,\beta_i), \min (\alpha_i,\gamma_i))$, oricare ar fi $i = 1,\ldots,t$, ceea ce este adevărat ţinând cont de problema **4.4.**

4.6. Relaţia de incluziune este o relaţie de ordine, conform problemei **3.2.**

Dacă $A, B \in P(M)$, atunci $\inf\{A,B\}=A \cap B$, iar $\sup\{A,B\}=A \cup B$, deci $(P(M), \subseteq)$ este o latice. Cel mai mic element al acestei latici este $\emptyset$ iar cel mai mare element este M.

Prin dublă incluziune se verifică imediat că $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$, oricare ar fi A, B, $C\in P(M)$, deci laticea $(P(M), \subseteq)$ este distributivă.

4.7. Reamintim că $\mathbf{N_5}$ are diagrama Hasse:

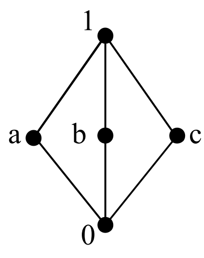


Observăm că $a < c$, pe când $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$ iar $(a \vee b) \wedge c = 1 \wedge c = c$, astfel că $a \vee (b \wedge c) \neq (a \vee b) \wedge c$.

4.8. Fie L o latice distributivă. Atunci $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $(\forall)$ $a,b,c\in L$.

Dacă luăm $c \leq a$ atunci relația de mai sus devine $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$, adică L este o latice modulară.

Considerăm laticea $\mathbf{M_5}$ ce are diagrama Hasse:



Aceasta este modulară (se verifică direct prin calcul) dar nu este distributivă (de exemplu, $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$ iar $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$).

4.9. (i). Dacă $x \wedge y = x$ cum $y \vee (x \wedge y) = y \Rightarrow y \vee x = y \Rightarrow x \vee y = y$. Dual, dacă $x \vee y = y \Rightarrow x \wedge y = x$.

(ii). Cum $x \wedge x = x \Rightarrow x \leq x$.

Dacă $x \leq y$ şi $y \leq x \Rightarrow x \wedge y = x$ şi $y \wedge x = y \Rightarrow x = y$.

Dacă $x \leq y$ şi $y \leq z \Rightarrow x \wedge y = x$ şi $y \wedge z = y$. Atunci $x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x$, adică $x \leq z$.

Deci $(L, \leq)$ este o mulţime ordonată.

Să arătăm că pentru $x,y \in L$, $\inf\{x,y\} = x \wedge y$ iar $\sup\{x,y\} = x \vee y$.

Cum $x \vee (x \wedge y) = x \Rightarrow x \wedge y \leq x$. Analog $x \wedge y \leq y$. Dacă mai avem $t \in L$ a.î. $t \leq x$ şi $t \leq y \Rightarrow t \wedge x = t$, $t \wedge y = t$ iar $t \wedge (x \wedge y) = (t \wedge x) \wedge y = t \wedge y = t \Rightarrow t \leq x \wedge y$.

Analog se arată că $\sup\{x,y\} = x \vee y$.

4.10. (i) $\Rightarrow$ (ii). Evident;

(ii) $\Rightarrow$ (i). Din 1) şi 2) rezultă că:

$x = x \wedge (x \vee x) = (x \wedge x) \vee (x \wedge x)$;

$x \wedge x = (x \wedge x) \wedge ((x \wedge x) \vee (x \wedge x)) = (x \wedge x) \wedge x$;

$$x \wedge x = x \wedge ((x \wedge x) \vee (x \wedge x)) = ((x \wedge x) \wedge x) \vee ((x \wedge x) \wedge x) = (x \wedge x) \vee (x \wedge x) = x ;$$

$x \vee x = (x \wedge x) \vee (x \wedge x) = x$, astfel rezultă idempotenţa lui $\wedge$ şi $\vee$.

Pentru comutativitate şi absorbţia duală:

$x \wedge y = x \wedge (y \vee y) = (y \wedge x) \vee (y \wedge x) = y \wedge x$;

$(x \wedge y) \vee x = (y \wedge x) \vee (x \wedge x) = x \wedge (x \vee y) = x$;

$$x \wedge (y \vee x) = (x \wedge x) \vee (y \wedge x) = x \vee (x \wedge y) = x \vee ((x \wedge y) \wedge ((x \wedge y) \vee x)) = (x \wedge x) \vee ((x \wedge y) \wedge x) = x \wedge ((x \wedge y) \vee x) = x \wedge x = x;$$

$x \vee y = (x \wedge (y \vee x)) \vee (y \wedge (y \vee x)) = (y \vee x) \wedge (y \vee x) = y \vee x$.

Asociativitatea:

$x \wedge ((x \vee y) \vee z) = (x \wedge (x \vee y)) \vee (x \wedge z) = x \vee (x \wedge z) = x$;

$$x \vee (y \vee z) = (x \wedge ((x \vee y) \vee z)) \vee (y \wedge ((y \vee x) \vee z)) \vee (z \wedge ((x \vee y) \vee z)) = (x \wedge ((x \vee y) \vee z)) \vee [((x \vee y) \vee z) \wedge (y \vee z)] = ((x \vee y) \vee z) \wedge (x \vee (y \vee z));$$

$$(x \vee y) \vee z = z \vee (y \vee x) = ((z \vee y) \vee x) \wedge (z \vee (y \vee x)) = ((x \vee y) \vee z) \wedge (x \vee (y \vee z)) = x \vee (y \vee z).$$

Astfel, conform problemei 4.9., $(L, \wedge, \vee)$ este latice iar din 2) deducem că ea este distributivă.

4.11. (i) $\Rightarrow$ (ii). Evident.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Demonstrăm că $x \vee 0 = x$ şi totul va rezulta din problema anterioară.

Dar, $x \vee x = (x \wedge (x \vee 0)) \vee (x \wedge (x \vee 0)) = x \wedge (x \vee x) = x$;

$x \wedge x = x \wedge (x \vee x) = x$;

$x \wedge y = x \wedge (y \vee y) = (y \wedge (x \vee 0)) \vee (y \wedge (x \vee 0)) = y \wedge (x \vee 0)$;

$x \vee 0 = (x \vee 0) \wedge (x \vee 0) = x \wedge (x \vee 0) = x$.

4.12. (i). Presupunem că $a = \bigvee\limits_{i \in I} a_i$ există. Atunci $a \geq a_i$ şi deci $c \wedge a \geq c \wedge a_i$, oricare ar fi $i \in I$. Fie acum $b \geq c \wedge a_i$, oricare ar fi $i \in I$; atunci $c' \vee b \geq c' \vee (c \wedge a_i) = (c' \vee c) \wedge (c' \vee a_i) = 1 \wedge (c' \vee a_i) = c' \vee a_i \geq a_i$, oricare ar fi $i \in I$, deci $c' \vee b \geq a$. Atunci $c \wedge (c' \vee b) \geq c \wedge a \Rightarrow (c \wedge c') \vee (c \wedge b) \geq c \wedge a \Rightarrow 0 \vee (c \wedge b) \geq c \wedge a \Rightarrow c \wedge b \geq c \wedge a \Rightarrow b \geq c \wedge a$, astfel că $c \wedge a = \bigvee\limits_{i \in I} (c \wedge a_i)$.

(ii). Din (i) prin dualizare.

4.13. Pentru $M \subseteq G$ vom nota prin $\langle M \rangle$ subgrupul lui G generat de M. Dacă $\{H_i\}_{i \in I}$ este o familie de subgrupuri ale lui G, atunci $\bigwedge\limits_{i \in I} H_i = \bigcap\limits_{i \in I} H_i$ iar $\bigvee\limits_{i \in I} H_i = \langle \bigcup\limits_{i \in I} H_i \rangle$.

4.14. (i). Evidentă.

(ii). Dacă notăm $d = [m,n]$, atunci cum $m \mid d$, $n \mid d$, din (i) deducem că $d\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ şi $d\mathbb{Z} \subseteq n\mathbb{Z}$. Fie acum $L = p\mathbb{Z} \in L(\mathbb{Z},+)$ (cu $p \in \mathbb{N}$) a.î. $L \subseteq H$ şi $L \subseteq K$. Din (i) deducem că $m \mid p$ şi $n \mid p$. Atunci $d \mid p$, adică $L \subseteq d\mathbb{Z}$, de unde concluzia că $H \wedge K = H \cap K = [m,n]\mathbb{Z}$.

(iii). Analog cu (ii).

(iv). Dacă H, K, $L\in L(\mathbb{Z},+)$, $H = m\mathbb{Z}$, $K = n\mathbb{Z}$ şi $L = p\mathbb{Z}$ (cu m, n, $p\in\mathbb{N}$) atunci ținând cont de (ii) şi (iii) avem:

$H \wedge (K \vee L) = [m, (n, p)]\mathbb{Z}$ iar $(H \wedge K) \vee (H \wedge L) = ([m, n], [m, p])\mathbb{Z}$ şi cum $[m, (n, p)] = ([m, n],[m, p])$ (conform problemei **4.5.**), deducem că $H \wedge (K \vee L) = (H \wedge K) \vee (H \wedge L)$, adică $(L(\mathbb{Z},+), \subseteq)$ este distributivă.

4.15. Contraexemplul ne este oferit de $G = (\mathbb{Z},+) \times (\mathbb{Z},+)$ vezi (**[6,7]**).

4.16. Este evident că $\{1\}$ şi G fac parte din $L_0(G)$. Fie acum H, $K\in L_0(G)$, $x\in G$ şi $h\in H\cap K$. Atunci $xhx^{-1}\in H, K$ deci $xhx^{-1}\in H\cap K$, adică $H\cap K \in L_0(G)$.

Să arătăm acum că $H \vee K = HK = KH$ (unde $HK=\{hk|h\in H, k\in K\}$). Avem $HK= \bigcup\limits_{x\in H} xK = \bigcup\limits_{x\in H} Kx = KH$.

În mod evident H, $K\subseteq HK$ iar dacă alegem $S\leq G$ a.î. H, $K\subseteq S$ atunci $HK\subseteq S$, adică $HK=KH=H\vee K$. Pentru a arăta că $HK\trianglelefteq G$, fie $x\in G$, $h\in H$ şi $k\in K$.

Scriind $x(hk)x^{-1} = (xhx^{-1})(xkx^{-1})$, cum $xhx^{-1}\in H$ şi $xkx^{-1}\in K$, deducem că $x(hk)x^{-1} \in HK$, adică $HK\trianglelefteq G$, deci şi $H\vee K\in L_0(G)$. Am demonstrat deci că $L_0(G)$ este sublatice (mărginită) a lui $L(G)$. Pentru a proba că $L_0(G)$ este modulară (conform problemei **4.2.)** fie H, K, $L\in L_0(G)$ a.î. $H\subseteq K$ şi să arătăm că $K\wedge(H\vee L) = H\vee(K\wedge L)$. Este suficient să probăm incluziunea $K\cap(HL) \subseteq H(K\cap L)$ (cealaltă fiind evidentă) iar pentru aceasta fie $x\in K\cap(HL)$. Atunci $x\in K$ şi $x\in HL$ ceea ce implică $x = yz$ cu $y\in H$ şi $z\in L$. Avem $z = y^{-1}x\in K$ şi cum $z\in L$ deducem că $z\in K\cap L$. Cum $y\in H$ rezultă $x=yz\in H(K\cap L)$, adică avem $K\cap(LH) \subseteq H(K\cap L)$.

4.17. Trebuie să arătăm (conform problemei **4.2.**) că dacă P, Q, R$\in L_A(M)$ şi R$\subseteq$P, atunci $P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee R \Leftrightarrow P\cap(Q+R) = (P\cap Q)+R$ (căci $Q\vee R = Q + R = \{x+y \mid x\in Q$ şi $y\in R\}$).

Cum incluziunea $(P\cap Q)+R \subseteq P\cap(Q+R)$ este evidentă, fie $x\in P\cap(Q+R)$. Atunci $x\in P$ şi $x = y+z$ cu $y\in Q$ şi $z\in R$. Cum $R\subseteq P$ deducem că $y = x-z\in P$ şi cum $y\in Q$ avem că $y\in P\cap Q$, adică $x\in(P\cap Q)+R$, deci este adevărată şi incluziunea $P\cap(Q+R)\subseteq$ $\subseteq(P\cap Q)+R$, de unde egalitatea $P\cap(Q+R)=(P\cap Q)+R$.

Observaţie. 1. În general, laticea $(\mathbf{L_A}(M), \subseteq)$ poate să nu fie distributivă. Contraexemplul ne este oferit de $\mathbb{Z}$-modulul $M = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

2. Laticea submodulelor $\mathbb{Z}$-modulului $\mathbb{Z}$ (adică laticea idealelor inelului $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$) este distributivă. Într-adevăr, dacă avem trei ideale I, J, K ale inelului $\mathbb{Z}$ atunci $I=m\mathbb{Z}$, $J=n\mathbb{Z}$, $K=p\mathbb{Z}$ cu $m, n, p\in\mathbb{N}$. Se verifică imediat că $I\cap J=[m, n]\mathbb{Z}$ iar $I\vee J=(m, n)\mathbb{Z}$, astfel că egalitatea $I\cap(J\vee K) = (I\cap J)\vee(I\cap K)$ este echivalentă cu $[m, (n, p)]=([m, n], [m, p])$ iar ultima egalitate este adevărată (vezi şi problema **4.14.**).

4.18. Fie $A = \{ x\in L \mid x \leq f(x) \} \neq \emptyset$ căci $(0\in A)$. Cum $A \subseteq L$ şi L este completă rezultă că există $a\in L$, $a = \sup A$. Atunci $x \leq a$, oricare ar fi $x\in A$, deci $x \leq f(x) \leq f(a)$, oricare ar fi $x\in A$. Rezultă că $a \leq f(a)$, deci $f(a) \leq f(f(a))$, adică $f(a)\in A$. Cum $a = \sup A$, rezultă că $f(a) \leq a$, de unde deducem egalitatea $a = f(a)$.

4.19. Conform problemei **4.3.** trebuie să demonstrăm, spre exemplu, că $x\wedge(y\vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, oricare ar fi $x, y, z\in L$. Cum inegalitatea $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ este adevărată în orice latice (vezi problema **4.1.** (ii)), trebuie să demonstrăm doar inegalitatea $x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Fie $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = t$, atunci $x \wedge y \leq t$ şi $x \wedge z \leq t$. Din definiția pseudocomplementului rezultă că $y \leq x \to t$ şi $z \leq x \to t$, deci $y \vee z \leq x \to t$, adică $x \wedge (y \vee z) \leq t$, ceea ce trebuia demonstrat.

4.20. Conform problemei **3.13.**, $\leq$ este o relație de ordine pe Hom(A, P).

Pentru f, g∈Hom (A, P), definind $h,t : A \to P$ astfel: $h(x) = f(x) \wedge g(x)$ şi $t(x) = f(x) \vee g(x)$, oricare ar fi $x \in A$ (lucru posibil deoarece P este latice), deducem imediat că $h = f \wedge g$ şi $t = f \vee g$, adică Hom(A,P) este latice.

4.21. Faptul că $(C[0,1],\leq)$ este mulțime ordonată rezultă din problema anterioară pentru $A = [0,1]$ şi $P = \mathbb{R}$, ambele mulțimi fiind ordonate (chiar latici).

Dacă $f, g \in C[0,1]$, cum funcția modul este continuă avem: $f \vee g = \max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2} \in C[0,1]$ şi $f \wedge g = \frac{f+g-|f-g|}{2} \in C[0,1]$, astfel că $(C[0,1], \leq)$ este o latice.

4.22. Deoarece X, Y sunt submulțimi finite ale laticei L, atunci există inf X, inf Y şi inf $(X \cup Y)$. Fie $a = \inf X$ şi $b = \inf Y$ şi $z = a \wedge b$. Deci $a \leq x$, oricare ar fi $x \in X$, $b \leq y$, oricare ar fi $y \in Y$ şi $z \leq a$, $z \leq b$. Atunci $z \leq x$, $z \leq y$, oricare ar fi $x \in X$ şi oricare ar fi $y \in Y$. Deci $z \leq t$, oricare ar fi $t \in X \cup Y$.

Fie $s \in L$ a.î. $s \leq t$, oricare ar fi $t \in X \cup Y$, deci $s \leq x$, oricare ar fi $x \in X$ şi $s \leq y$, oricare ar fi $y \in Y$. Cum $a = \inf X$ şi $b = \inf Y$ rezultă că $s \leq a$ şi $s \leq b$, şi deoarece $z = a \wedge b$, avem că $s \leq z$, deci $z = \inf (X \cup Y)$.

4.23. Presupunem că x şi y sunt ambele elemente maximale ale lui L. Cum $x \leq x \vee y$ şi $y \leq x \vee y$ şi deoarece x şi y sunt maximale, rezultă că $x = x \vee y = y$, adică $x = y$. Pentru cazul elementului minimal procedăm prin dualizare.

4.24. Fie $\overline{S}$ = { a$\in$L | există s_1, …, $s_n\in$S a.î. a $\le s_1 \vee\ldots \vee s_n$}. Se verifică imediat că $\overline{S}$ este ideal al lui L ce conține pe S, de unde incluziunea (S] $\subseteq \overline{S}$.

Fie I un ideal al lui L ce conține pe S şi a$\in \overline{S}$. Atunci există s_1, …, $s_n\in$S $\subseteq$ I a.î. a $\le s_1 \vee\ldots\vee s_n$. Deducem imediat că a$\in$I, deci $\overline{S} \subseteq \cap$ {I | I$\in$I(L) şi S $\subseteq$ I } = (S].

Din (S] $\subseteq \overline{S}$ şi $\overline{S} \subseteq$ (S] deducem că (S] = $\overline{S}$.

4.25. Totul rezultă din dualizarea soluției de la problema **4.24.**

4.26. Dacă $(I_k)_{k\in K}$ este o familie de ideale ale lui L, atunci $\bigwedge\limits_{k\in K} I_k = \bigcap\limits_{k\in K} I_k$ iar $\bigvee\limits_{k\in K} I_k = (\bigcup\limits_{k\in K} I_k]$. Dacă L are **0**, atunci **0** (în I(L)) = {0} iar **1** = L.

Pentru filtre raționăm prin dualizare. Dacă L are **1** atunci **0** (în F(L)) = {1} iar **1**= L.

4.27. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Evident, deoarece pentru orice filtru F şi x, y$\in$F $\Rightarrow$ x $\vee$ y $\in$F (căci x, y $\le$ x $\vee$ y).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Dacă x, y$\in$I atunci x,y$\notin$F, deci x $\vee$ y$\notin$F $\Rightarrow$ x $\vee$ y$\in$L\F = I. Alegând x, y$\in$L cu x $\le$ y şi y$\in$I = L\F $\Rightarrow$ y $\notin$F. Atunci x$\notin$F (căci în caz contrar am deduce că y$\in$F), deci x$\in$L\F=I, adică I este un ideal.

Fie acum x, y$\in$L a.î. x $\wedge$ y $\in$I. Dacă prin absurd x$\notin$I şi y$\notin$I, atunci x, y$\in$F $\Rightarrow$ x $\wedge$ y $\in$F $\Rightarrow$ x $\wedge$ y $\notin$I – absurd!.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Prin dualizarea implicației precedente.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Fie h : L $\to$ {0,1}, h(x) = 1 dacă x$\in$F şi h(x) = 0 dacă x$\in$L \ F. Atunci h este surjecție deoarece $\varnothing \ne$ F $\ne$ L. Dacă x, y$\in$L atunci h(x $\wedge$ y) = 1 $\Leftrightarrow$ x $\wedge$ y $\in$F $\Leftrightarrow$ x, y$\in$F (x $\wedge$ y $\le$ x, y şi F filtru) $\Leftrightarrow$ h(x) = h(y) = 1 $\Leftrightarrow$ h(x) $\wedge$ h(y) = 1, deci h(x $\wedge$ y) = h(x) $\wedge$ h(y), oricare ar fi x, y$\in$L. Analog se arată că h(x $\vee$ y) = h(x) $\vee$ h(y) oricare ar fi x, y$\in$L. Deci h este un morfism surjectiv de latici şi F = h^{-1}({1}).

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Deoarece h este surjecţie avem că $\emptyset \neq F \neq L$.

Atunci $x \wedge y \in F \Leftrightarrow h(x) \wedge h(y) = h(x \wedge y) = 1 \Leftrightarrow h(x) = h(y) \Leftrightarrow x \in F$ şi $y \in F$, deci F este un filtru propriu.

4.28. Fie $G = \{ F' \mid F'$ filtru a.î. $F \subseteq F'$ şi $F' \cap I = \emptyset\}$. Astfel G este inductiv ordonată şi din lema lui Zorn rezultă că G are un element maximal P. Deoarece $P \in G$, rămâne să arătăm că P este prim. P este filtru propriu deoarece $P \cap I = \emptyset$. Presupunem că P nu este prim, atunci există $a, b \in L$ a.î. $a \vee b \in P$, $a \notin P$ şi $b \notin P$ (conform problemei **4.27.**). Fie $X = P \cup \{a\}$. Atunci $[X) \cap I \neq \emptyset$, căci altfel $[X) \in G$ şi $P \subset [X)$ ceea ce contrazice maximalitatea lui P. Fie $x \in [X) \cap I$, deci există $p \in P$ a.î. $p \wedge a \leq x$ şi deoarece $x \in I$ rezultă că $p \wedge a \in I$. Analog există $q \in P$ a.î. $q \wedge b \in I$. Deci $(p \wedge a) \vee (q \wedge b) \in I$. Dar $(p \wedge a) \vee (q \wedge b) = (p \vee q) \wedge (p \vee b) \wedge (q \vee a) \wedge (a \vee b) \in P$, deci $I \cap P \neq \emptyset$, ceea ce este o contradicţie. Deci P este un filtru prim.

Rezultatul pentru ideale se obţine prin dualizare.

4.29. Aplicăm problema **4.28.** pentru $F = [a)$ (respectiv $I = (a]$) (avem că $I \cap F \neq \emptyset$, căci dacă am avea $x \in F \cap I$ atunci $x \geq a$, deci $a \in I$ – absurd).

4.30. Aplicăm problema **4.28.** pentru $I = (b]$ (respectiv $F = [b)$).

4.31. Aplicăm problema **4.29.** pentru $I = (b]$ şi $F = [a)$.

4.32. Fie F un filtru propriu. Fie $\mathcal{F} = \{P \mid P$ filtru prim a.î. $F \subseteq P\}$. Conform problemei **4.30.** $\mathcal{F}$ nu este mulţimea vidă. Fie $F' = \cap\{P \mid P \in \mathcal{F}\}$ şi arătăm că $F = F'$. Presupunem că există $a \in F' \setminus F$, deci conform problemei **4.30.** există un filtru prim $P \in \mathcal{F}$ a.î. $a \notin P$, ceea ce contrazice faptul că $a \in F'$.

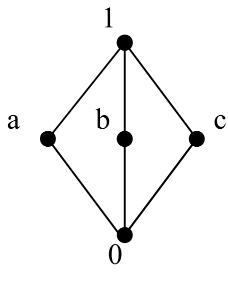
4.33. Fie F un filtru maximal. Atunci F este inclus într-un filtru prim P (vezi problema **4.28.**), deci F = P din maximalitatea lui F.

4.34. Se probează imediat că $f : [a \wedge b, a] \to [b, a \vee b]$, $f(x) = x \vee b$ pentru orice $a \wedge b \leq x \leq a$ este izomorfismul căutat (inversul lui f fiind $g : [b, a \vee b] \to [a \wedge b, a]$, $g(x) = x \wedge a$, pentru orice $b \leq x \leq a \vee b$).

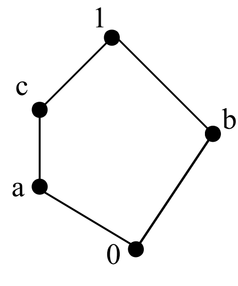
4.35. Să presupunem că L este distributivă. Ţinând cont de problema **4.24.** pentru $t \in I \vee J$ există $i \in I$ şi $j \in J$ a.î. $t \leq i \vee j$, astfel că $t = t \wedge (i \vee j) = (t \wedge i) \vee (t \wedge j) = i' \vee j'$ cu $i' = i \wedge t \in I$ şi $j' = j \wedge t \in J$.

Pentru a proba afirmaţia reciprocă, să presupunem prin absurd că L nu este distributivă şi să arătăm că există idealele I, $J \in I(L)$ ce nu verifică ipoteza. Conform problemei **4.3.**, există elementele $a,b,c \in L$ care împreună cu **0** şi **1** formează una din laticile:

M_5:



sau **N_5**:



Fie I = (b], J = (c]. Cum $a \leq b \vee c$ deducem că $a \in I \vee J$. Dacă am avea $a = i \vee j$ cu $i \in I$ şi $j \in J$, atunci $j \leq c$, deci $j \leq a \wedge c < b$, adică $j \in I$ şi astfel $a = i \vee j \in I$, deci $a \leq b$, ceea ce este absurd!.

4.36. (i). Din echivalenţa $t \leq x \wedge y \Leftrightarrow t \leq x$ şi $t \leq y$ deducem imediat egalitatea: $(x] \wedge (y] = (x \wedge y]$.

Pentru cealălaltă incluziune, din $x,y \le x \vee y$ deducem că $x,y \in (x \vee y]$, deci $(x], (y] \subseteq (x \vee y]$ şi de aici $(x] \vee (y] \subseteq (x \vee y]$.

(ii). Să presupunem acum că L este distributivă cu **0** şi **1** şi să arătăm cealaltă incluziune: $(x \vee y] \subseteq (x] \vee (y]$. Conform problemei **4.35.**, $(x] \vee (y] = \{i \vee j \mid i \in (x]$ şi $j \in (y]\} = \{i \vee j \mid i \le x$ şi $j \le y\}$. Fie $t \le x \vee y$; atunci $t = t \wedge (x \vee y) = (t \wedge x) \vee (t \wedge y) \in (x] \vee (y]$ (deoarece $t \wedge x \in (x]$, $t \wedge y \in (y]$), adică $(x \vee y] \subseteq (x] \vee (y]$.

4.37. Să presupunem că $I \wedge J = (x]$ şi $I \vee J = (y]$. Conform problemei **4.35.**, $y = i \vee j$ cu $i \in I$ şi $j \in J$. Dacă $c = x \vee i$ şi $b = x \vee j$, atunci $c \in I$, $b \in J$ şi să demonstrăm că $I = (c]$ şi $J = (b]$.

Dacă prin absurd $J \ne (b]$, atunci există $a \in J \setminus (b]$, $a > b$. Se probează imediat că $\{x, a, b, c, y\}$ este o sublatice izomorfă cu $\mathbf{N_5}$ – absurd (deoarece L este presupusă distributivă). Dacă $I \ne (c]$ se găseşte analog o sublatice a lui L izomorfă cu $\mathbf{N_5}$ – absurd.

4.38. Fie $a \in L$ şi a', a'' doi complemenţi ai lui a.

Din $a \wedge a' = 0 = a \wedge a''$ şi $a \vee a' = 1 = a \vee a''$ deducem că $a' = a''$ (L fiind distributivă).

4.39. În mod evident $1=0^*$ iar (i) şi (ii) rezultă din definiţia pseudocomplementului.

(iii). Dacă $a \le b \Rightarrow a \wedge b^* \le b \wedge b^* = 0 \Rightarrow a \wedge b^* = 0 \Rightarrow b^* \le a^*$.

(iv). Dacă $a^* \wedge a = 0 \Rightarrow a \le (a^*)^* = a^{**}$.

(v). Din $a \le a^{**}$ şi (iii) deducem că $a^{***} \le a^*$ şi cum $a^* \le (a^*)^{**} = a^{***}$ deducem că $a^{***} = a^*$.

(vi). Dacă $a \wedge b = 0 \Rightarrow b \le a^* \Rightarrow a^{**} \wedge b \le a^{**} \wedge a^* = 0 \Rightarrow a^{**} \wedge b = 0$.

Dacă $a^{**} \wedge b = 0$ cum $a \le a^{**} \Rightarrow a \wedge b \le a^{**} \wedge b = 0 \Rightarrow a \wedge b = 0$.

(vii). Din $a \le a^{**} \Rightarrow a \wedge b \le a^{**} \wedge b \Rightarrow (a^{**} \wedge b)^* \le (a \wedge b)^*$.

Vom demonstra că $(a \wedge b)^* \wedge a^{**} \wedge b = 0$ de unde vom deduce că $(a \wedge b)^* \le (a^{**} \wedge b)^*$ (adică egalitatea cerută). Ţinând cont de (vi) avem: $((a \wedge b)^* \wedge b) \wedge a^{**} = 0 \Leftrightarrow ((a \wedge b)^* \wedge b) \wedge a = 0 \Leftrightarrow (a \wedge b)^* \wedge (a \wedge b) = 0$ (ceea ce este evident).

(viii). Cum L este distributivă avem $(a \vee b) \wedge (a^* \wedge b^*) = (a \wedge a^* \wedge b^*) \vee (b \wedge a^* \wedge b^*) = 0 \vee 0 = 0$. Fie acum $x \in L$ a.î. $(a \vee b) \wedge x = 0$. Deducem că $(a \wedge x) \vee (b \wedge x) = 0$ adică $a \wedge x = b \wedge x = 0$, de unde $x \le a^*$ şi $x \le b^*$, deci $x \le a^* \wedge b^*$.

(ix). Avem $(a \wedge b)^{**} \le a^{**}, b^{**}$, deci $(a \wedge b)^{**} \le a^{**} \wedge b^{**}$. Pentru inegalitatea inversă, din $(a \wedge b) \wedge (a \wedge b)^* = 0 \Rightarrow b \wedge [a \wedge (a \wedge b)^*] = 0 \Rightarrow b^{**} \wedge [a \wedge (a \wedge b)^*] = 0 \Rightarrow a \wedge [b^{**} \wedge (a \wedge b)^*] = 0 \Rightarrow a^{**} \wedge [b^{**} \wedge (a \wedge b)^*] = 0 \Rightarrow (a^{**} \wedge b^{**}) \wedge (a \wedge b)^* = 0 \Rightarrow a^{**} \wedge b^{**} \le ((a \wedge b)^*)^* = (a \wedge b)^{**}$, de unde egalitatea din enunţ.

(x). Din (viii) avem: $(a^{**} \vee b^{**})^{**} = (a^{***} \wedge b^{***})^* = (a^* \wedge b^*)^* = ((a \vee b)^*)^* = (a \vee b)^{**}$.

4.40. Avem $a \wedge a' = 0$ iar dacă mai avem $x \in L$ a.î. $a \wedge x = 0$ atunci $x = x \wedge 1 = x \wedge (a' \vee a) = (x \wedge a') \vee (x \wedge a) = x \wedge a' \le a'$, adică $a' = \sup \{ x \in L \mid a \wedge x = 0] = a^*$ şi cum $a \to 0 = \sup\{x \in L \mid a \wedge x \le 0\} = \sup\{x \in L \mid a \wedge x = 0\}$ deducem că $a' = a \to 0 = a^*$.

4.41. Faptul că $(a')' = a$ este imediat. Ţinând cont de problemele **4.39.**, **4.40.** şi de principiul dualizării, este suficient să demonstrăm că $(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') = 0$ iar $(a \wedge b) \vee (a' \vee b') = 1$.

Într-adevăr, $(a \wedge b) \wedge (a' \vee b') = (a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge b') = 0 \vee 0 = 0$ iar $(a \wedge b) \vee (a' \vee b') = (a \vee a' \vee b') \wedge (b \vee a' \vee b') = 1 \wedge 1 = 1$.

4.42. (i). Ţinând cont de problema **4.39.** (v), egalitatea $R(L) = \{ a \in L \mid a^{**} = a\}$ este imediată. Dacă $a, b \in R(L)$, atunci $a^{**} = a$, $b^{**} = b$ şi din problema **4.39.** (ix) deducem că $(a \wedge b)^{**} = a^{**} \wedge b^{**} = a \wedge b$, de unde concluzia că $a \wedge b \in R(L)$. De asemenea, tot conform problemei **4.39.** (x), deducem că $(a \vee b)^{**} = a^{**} \vee b^{**} = a \vee b$, adică $a \vee b \in R(L)$. În mod evident, dacă $a \in R(L)$ atunci şi $a^* \in R(L)$ (conform problemei **4.39.** (v)), deci R(L) este de fapt sublatice pseudocomplementată a lui L. Cum $1^* = 0$ şi $0^* = 1$ avem că $0, 1 \in R(L)$.

(ii). Dacă $a \in L$, $b \in D(L)$ şi $b \le a$ atunci $a^* \le b^* = 0$, deci $a^* = 0$, adică $a \in D(L)$. Dacă $a, b \in D(L)$, atunci $a^* = b^* = 0$ şi cum $(a \wedge b)^* = (a^{**} \wedge b^{**})^*$ (conform problemei **4.39.** (vii)) deducem că $(a \wedge b)^* = (0^* \wedge 0^*)^* = (1 \wedge 1)^* = 1^* = 0$, adică $a \wedge b \in D(L)$, de unde concluzia că D(L) este filtru al lui L. Dacă $a \in D(L) \cap R(L)$, atunci $a^* = 0$ şi $a = a^{**}$, de unde $a = 0^* = 1$.

(iii). Conform problemei **4.39.** (viii), avem $(a \vee a^*)^* = $ $= a^* \wedge a^{**} = 0$, adică $a \vee a^* \in D(L)$.

(iv). Din problema **4.39.** (v), (ix) şi (x) rezultă că φ_L este un morfism de latici pseudocomplementate. Conform primei teoreme de izomorfism a algebrei universale, $L / \mathrm{Ker}(\varphi_L) \approx \mathrm{Im}\, \varphi_L$. Este evident că φ_L este un morfism surjectiv, deci $\mathrm{Im}\, \varphi_L = R(L)$. Demonstrăm că $\mathrm{Ker}(\varphi_L)$ este D(L). Dacă $a \in D(L)$ atunci $a^* = 0$, deci $\varphi_L(a) = a^{**} = 0^* = 1$, deci $a \in \mathrm{Ker}(\varphi_L)$. Dacă $a \in \mathrm{Ker}(\varphi_L)$ atunci $\varphi_L(a) = 1 \Rightarrow a^{**} = 1 \Rightarrow a^{***} = 1^* \Rightarrow a^* = 0 \Rightarrow a \in D(L)$. Astfel $L / D(L) \approx R(L)$.

4.43. (i). Dacă $x = (x_i)_{i\in I}$ şi $y = (y_i)_{i\in I}$ sunt două elemente ale lui L, atunci $x \wedge y = (x_i \wedge y_i)_{i\in I}$ iar $x \vee y = (x_i \vee y_i)_{i\in I}$.

(ii). Se procedează ca în cazul produsului direct de mulţimi ordonate cu precizarea că mai trebuie verificat faptul că u este morfism de latici (ceea ce este aproape evident).

4.44. Fie $F = (x_j)_{j\in J} \subset \prod_{i\in I} L_i$ (cu $x_j = (x_i^j)_{i\in I}$ pentru orice $j \in J$) o familie de elemente din $\prod_{i\in I} L_i$. Atunci $\sup(F) = (s_i)_{i\in I}$ şi $\inf(F) = (t_i)_{i\in I}$ unde pentru orice $i \in I$, $s_i = \sup\{x_i^j\}_{j\in J}$ iar $t_i = \inf\{x_i^j\}_{j\in J}$, adică $\prod_{i\in I} L_i$ este completă.

4.45. Dacă $x = (x_i)_{i \in I}$, $y = (y_i)_{i \in I}$ şi $z = (z_i)_{i \in I}$ sunt trei elemente din $\prod_{i \in I} L_i$, atunci: $x \wedge (y \vee z) = (x_i \wedge (y_i \vee z_i))_{i \in I} =$
$= ((x_i \wedge y_i) \vee (x_i \wedge z_i))_{i \in I} = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

4.46. (i) $\Rightarrow$ (ii). Evident.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Din $x,y \le x \vee y \Rightarrow f(x), f(y) \le f(x \vee y) \Rightarrow f(x) \vee f(y) \le f(x \vee y)$ şi cu ajutorul lui (2) deducem că $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y)$.

Dual, din $x \wedge y \le x, y \Rightarrow f(x \wedge y) \le f(x), f(y) \Rightarrow f(x \wedge y) \le f(x) \wedge f(y)$ şi cu ajutorul lui (3) deducem că $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, adică f este morfism de latici.

4.47. (i) $\Rightarrow$ (ii). Dacă $x,y \in L$ şi $x \le y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow f(x \wedge y) = f(x) \Rightarrow f(x) \le f(y)$, adică f este morfism de mulţimi ordonate (deci izomorfism de mulţimi ordonate).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Să arătăm că f este morfism de latici, iar pentru aceasta arătăm că mai sunt îndeplinite condiţiile (2) şi (3) de la problema **4.46.**.

Cum f este presupus izomorfism de mulţimi ordonate avem că $x, y \in L$, $x \le y \Leftrightarrow f(x) \le f(y)$. Astfel, $f(x \vee y) \le f(x) \vee f(y) \Leftrightarrow x \vee y \le f^{-1}(f(x) \vee f(y))$ ceea ce este evident deoarece din $f(x) \le f(x) \vee f(y) \Rightarrow x \le f^{-1}(f(x) \vee f(y))$ şi analog $y \le f^{-1}(f(x) \vee f(y))$, de unde deducem că $x \vee y \le f^{-1}(f(x) \vee f(y))$, adică este îndeplinită condiţia (2). Analog deducem că este îndeplinită şi condiţia (3).

4.48. Avem că $1 = a \to a$ pentru un $a \in H$ deoarece pentru orice $x \in H$, cum $a \wedge x \le a$ avem că $x \le a \to a$.

(i). Rezultă din definirea lui $x \to y$.

(ii). "$\Rightarrow$". Din definirea lui $x \to y$.

"$\Leftarrow$". Avem $x \wedge y \le x \wedge (x \to z) \le z$.

(iii). Avem $x \to y = 1 \Leftrightarrow 1 \le x \to y \Leftrightarrow x \wedge 1 \le y \Leftrightarrow x \le y$.

(iv). Avem $x \wedge y \le y \Leftrightarrow y \le x \to y$.

(v). Avem $z \wedge (z \to x) \le x \le y$ deci $z \to x \le z \to y$ iar $x \wedge (y \to z) \le y \wedge (y \to z) \le z$ deci $y \to z \le x \to z$.

(vi). Avem $x \wedge y \wedge [x \to (y \to z)] = y \wedge [x \wedge (x \to \to(y \to z))] \le y \wedge (y \to z) \le z$ deci $x \to (y \to z) \le (x \wedge y) \to z$.

Invers, $x \wedge y \wedge[(x \wedge y) \to z] \le z$ deci $x \wedge [(x \wedge y) \to z] \le \le y \to z$ şi astfel $(x \wedge y) \to z \le x \to (y \to z)$.

(vii). Avem $x \wedge (x \to y) \le x$ şi $(x \wedge y) \wedge x \wedge (y \to z) \le \le x \wedge z$, deci $x \wedge (y \to z) \le (x \wedge y) \to (x \wedge z)$, de unde deducem că $x \wedge (y \to z) \le x \wedge [(x \wedge y) \to (x \wedge z)]$.

Invers, $x \wedge [(x \wedge y) \to (x \wedge z)] \le x$ şi $y \wedge x \wedge [(x \wedge y) \to \to (x \wedge z)] \le x \wedge z \le z$, deci $x \wedge [(x \wedge y) \to (x \wedge z)] \le y \to z$, de unde deducem că $x \wedge [(x \wedge y) \to (x \wedge z)] \le x \wedge (y \to z)$.

(viii). Clar $x \wedge (x \to y) \le x, y$. De asemenea $x \wedge y \le x, x \to y$, de unde egalitatea $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$.

(ix). Din $x, y \le x \vee y \Rightarrow (x \vee y) \to z \le x \to z, y \to z$.

Invers, $(x \vee y) \wedge (x \to z) \wedge (y \to z) \le [x \wedge (x \to y)] \vee \vee [y \wedge (y \to z)] \le z \vee z = z$, deci $(x \to z) \wedge (y \to z)\le (x \vee y) \to z$.

(x). $y \wedge z \le y, z \Rightarrow x \to (y \wedge z) \le x \to y, x \to z$.

De asemenea $x \wedge (x \to y) \wedge (x \to z) \le x \wedge y \wedge (x \to z) \le \le y \wedge z$ deci $(x \to y) \wedge (x \to z) \le x \to (y \wedge z)$.

(xi). Avem: $y \le x \to y \Rightarrow (x \to y)^* \le y^*$ şi $x^* = x \to 0 \le \le x \to y \Rightarrow (x \to y)^* \le x^{**}$ deci $(x \to y)^* \le x^{**} \wedge y^*$.

Invers, $x^{**} \wedge y^*\wedge (x \to y) = x^{**} \wedge y^* \wedge [(x \wedge y^*) \to (y \wedge y^*)] = x^{**} \wedge y^* \wedge [(x \wedge y^*)\to 0] = x^{**} \wedge y^* \wedge [(x \wedge y^*) \to (0 \wedge y^*)] = x^{**} \wedge y^* \wedge (x \to 0)= x^{**} \wedge y^*\wedge x^* = 0$, deci $x^{**} \wedge y^* \le (x \to y)^*$, adică egalitatea cerută.

4.49. În mod evident $(L, \le)$ devine latice. Să demonstrăm că $a \wedge x \le b \Leftrightarrow x \le a\to b$.

Dacă $a \le b$ avem de demonstrat că $a \wedge x \le b \Leftrightarrow x \le 1$.

Într-adevăr, implicaţia "$\Rightarrow$ " este evidentă, iar pentru "$\Leftarrow$ " ţinem cont că $a \wedge x \le a \le b$.

Să presupunem acum că $b < a$. Avem de demonstrat echivalenţa $a \wedge x \le b \Leftrightarrow x \le a \to b = b$.

"$\Rightarrow$ ". Dacă $a \le x \Rightarrow a = a \wedge x \le b$ – absurd. Deci $x < a$ şi atunci $x = a \wedge x \le b$.

"$\Leftarrow$ ". Dacă $x \le b$ atunci $a \wedge x \le x \le b$.

4.50. În mod evident $(\tau, \cap, \cup, \emptyset)$ este o latice cu **0**.

Fie $D, D_1, D_2 \in \tau$. Avem $D_1 \cap \text{int}\,[(X \setminus D_1) \cup D_2] \subseteq$ $\subseteq D_1 \cap [(X \setminus D_1) \cup D_2] = D_1 \cap D_2$.

Dacă $D \cap D_1 \subseteq D_2 \Rightarrow D \subseteq (X \setminus D_1) \cup D_2 \Rightarrow D \subseteq$ $\subseteq \text{int}[(X \setminus D_1) \cup D_2] = D_1 \to D_2$.

4.51. Fie $f : L \to (a] \times (a']$, $f(x) = (x \wedge a, x \wedge a')$. Avem $f(0) = (0,0) = \mathbf{0}$ şi $f(1) = (a,a') = \mathbf{1}$. Dacă $x \leq y$ atunci $x \wedge a \leq y \wedge a$ şi $x \wedge a' \leq y \wedge a'$ adică $f(x) \leq f(y)$.

Dacă $f(x) \leq f(y) \Rightarrow x \wedge a \leq y \wedge a$ şi $x \wedge a' \leq y \wedge a' \Rightarrow$ $(x \wedge a) \vee (x \wedge a') \leq (y \wedge a) \vee (y \wedge a') \Rightarrow x \wedge (a \vee a') \leq y \wedge (a \vee a')$ $\Rightarrow x \wedge 1 \leq y \wedge 1 \Rightarrow x \leq y$.

Deducem în particular că f este injecţie.

Pentru a proba că f este surjecţie (deci bijecţie) fie $(u,v) \in (a] \times (a']$ (adică $u \leq a$ şi $v \leq a'$). Atunci $f(u \vee v) = ((u \vee v) \wedge$ $\wedge\, a, (u \vee v) \wedge a') = ((u \wedge a) \vee (v \wedge a), (u \wedge a') \vee (v \wedge a')) = (u, v)$ deoarece $u \wedge a = u$, $v \wedge a' = v$ iar $v \wedge a = u \wedge a' = 0$.

Deci f este izomorfism de mulţimi ordonate şi din problema **4.47.** deducem că f este izomorfism de latici.

Pentru celălalt izomorfism procedăm analog considerând $g : L \to (a] \times [a)$, $g(x) = (a \wedge x, a \vee x)$.

§5. Latici (algebre) Boole.

5.1. Avem:

$\vee$	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

$'$	**0**	**1**
	1	0

5.2. În paragraful precedent am demonstrat că $(P(M), \subseteq)$ este o latice distributivă mărginită (vezi problema **4.6.**). Dacă $A \in P(M)$, atunci $A' = M \setminus A$ pentru că $A \cap A' = \varnothing$ şi $A \cup A' = M$, deci $(P(M), \subseteq)$ este o latice Boole.

5.3. (i). Deoarece oricare ar fi $x \in B$ avem $x \wedge x' = \mathbf{0}$ şi $x \vee x' = \mathbf{1}$ rezultă că x este complementul lui x', deci $x = (x')'$.

Relațiile (ii) şi (iii) rezultă din problema **4.39.**.

(iv) este duala lui (iii).

(v). Dacă $x = y$ totul este clar. Considerăm că $(x' \wedge y) \vee \vee(x \wedge y') = \mathbf{0}$. Atunci $x' \wedge y = x \wedge y' = \mathbf{0}$ şi din (iii) rezultă că $y \leq x$ şi $x \leq y$, deci $x = y$.

(vi) este duala lui (v).

5.4. În mod evident, dacă $p, q \in D_n$, atunci $1, n, p \wedge q, p \vee q$ şi p' fac de asemenea parte din D_n, deci D_n este sublatice a laticii $(\mathbb{N}, |)$ (vezi problema **3.1.**)

Să observăm că din ipoteză rezultă că n este de forma $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ cu p_i numere prime distincte, deci $|D_n| = \underbrace{(1+1)\ldots(1+1)}_{k\ ori} = 2^k$.

Deoarece $(\mathbb{N}, |)$ este latice distributivă rezultă că şi $(D_n, |)$ este distributivă. Cum pentru $p \in D_n$, $p \wedge p' = p \wedge (n/p) = (p, n/p) = =1 = \mathbf{0}$ iar $p \vee p' = [p, n/p] = p \cdot (n/p) = n = \mathbf{1}$ deducem că $(D_n, |)$ este latice Boole.

5.5. Arătăm că $\leq$ este o ordine pe B:

- *reflexivitatea*: $a \leq a \Leftrightarrow a^2 = a$ – adevărat;

- *antisimetria*: dacă $a \leq b$ şi $b \leq a$, atunci $ab = a$ şi $ba = b$ şi deoarece orice inel Boole este comutativ, rezultă că $a = b$;

- *tranzitivitatea*: dacă $a \leq b$ şi $b \leq c$ atunci $ab = a$ şi $bc = b$, deci $ac = (ab)c = a(bc) = ab = a$, adică $a \leq c$.

Deoarece $a(ab) = a^2b = ab$ şi $b(ab) = ab^2 = ab$, deducem că $ab \leq a$ şi $ab \leq b$. Dacă $c\in B$ a.î. $c \leq a$ şi $c \leq b$ atunci $ca = c = cb$, de unde rezultă că $c(ab) = (ca)b = cb = c$, adică $c \leq ab$ şi astfel $ab = a \wedge b$.

Analog se probează faptul că $a \vee b = a + b + ab$.

Deoarece $a \wedge (b \vee c) = a(b + c + bc) = ab + ac + abc$ iar $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (ab) \vee (ac) = ab + ac + abc$ deducem că $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, adică B este o latice distributivă.

Dacă $a \in B$ atunci $a \wedge a' = a \wedge (\mathbf{1} + a) = a(\mathbf{1} + a) = a + a^2 = a + a = \mathbf{0}$ şi $a \vee a' = a \vee (\mathbf{1}+ a) = a + \mathbf{1}+ a + a(\mathbf{1} + a) = \mathbf{1} + a + a + a^2 + a = \mathbf{1} + a + a + a + a = \mathbf{1}$.

Astfel, $(B, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1})$ este o algebră Boole.

Reciproc, demonstrăm întâi că $(B, + , \cdot)$ este un inel.

- *asociativitatea adunării*:

$$\begin{aligned}a + (b + c) &= [a \wedge (b + c)'] \vee [a' \wedge (b + c)] =\\ &= \{a \wedge[(b \wedge c') \vee (b' \wedge c)]'\} \vee \{a' \wedge [(b \wedge c') \vee (b'\wedge c)]\} =\\ &= \{a \wedge [(b' \vee c) \wedge (b \vee c')]\}\vee [(a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b'\wedge c)] =\\ &= \{a \wedge [(b' \wedge c') \vee (b \wedge c)]\}\vee[(a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c)]=\\ &= (a \wedge b'\wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a' \wedge b \wedge c') \vee (a' \wedge b' \wedge c) =\\ &= (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b' \wedge c') \vee (b \wedge c'\wedge a') \vee (c \wedge a' \wedge b ').\end{aligned}$$

Cum forma finală este simetrică în a, b şi c deducem că $a + (b + c) = (a + b) + c$.

- *comutativitatea*:

$$a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b) = (b \wedge a') \vee (b' \wedge a) = b + a.$$

- *elementul neutru*:

$$a + \mathbf{0} = (a \wedge \mathbf{0}') \vee (a' \wedge \mathbf{0}) = (a \wedge \mathbf{1}) \vee (a' \wedge \mathbf{0}) = a \vee \mathbf{0} = a.$$

- *elementele simetrizabile*:

Deoarece $a + a = (a \wedge a') \vee (a' \wedge a) = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \mathbf{0}$, deducem că $-a = a$.

Astfel, $(B,+)$ este grup abelian.

- *asociativitatea înmulțirii*:

$$a(bc) = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = (ab)c.$$

- *elementul neutru*:

$$a \cdot \mathbf{1} = a \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1} \wedge a = a.$$

- *distributivitatea înmulțirii față de adunare*:

$$a\cdot (b + c) = a \wedge [(b \wedge c')\vee(b' \wedge c)]=(a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge b' \wedge c)$$

iar

$$\begin{aligned}(ab) + (ac) &= (a \wedge b) + (a \wedge c) = [(a \wedge b) \wedge (a \wedge c)'] \vee \\ &\vee[(a \wedge b)' \wedge (a \wedge c)]=[a \wedge b \wedge (a' \vee c')]\vee[(a' \vee b') \wedge a \wedge c]= \\ &=(a \wedge b \wedge a') \vee (a \wedge b \wedge c') \vee (a \wedge c \wedge a') \vee (a \wedge c \wedge b') = \\ &= \mathbf{0} \vee (a \wedge b \wedge c') \vee \mathbf{0} \vee (a \wedge c \wedge b') = \\ &= (a \wedge b \wedge c')\vee (a \wedge c \wedge b'),\end{aligned}$$

de unde deducem că $a\cdot(b + c) = ab + ac$, $(\forall)$ $a,b,c\in B$.

Deoarece înmulțirea este comutativă ($ab = a \wedge b = b \wedge a = ba$) deducem și că $(b+c)\cdot a = ba + ca$, $(\forall)$ $a,b,c\in B$. Astfel, $(B, +, \cdot)$ este un inel unitar.

Dacă $a\in B$, atunci $a^2 = a \wedge a = a$, deci $(B, +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ este un inel Boole.

5.6. Totul rezultă din definiția morfismelor de inele și de latici Boole, precum și din problema **5.5.**

5.7. Relația $\subseteq$ fiind de ordine rezultă că $(Z(X),\subseteq)$ este o mulțime ordonată.

Fie $A,B\in Z(X)$. Avem posibilitățile:

i) A,B finite; atunci $A \cap B$ finită, deci $A \cap B \in Z(X)$;

ii) $X \setminus A$, $X \setminus B$ finite; atunci $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A\cap B)$

este finită, deci $A\cap B\in Z(X)$;

iii) A şi $X \setminus B$ finite; atunci $A \cup (X \setminus B)$ este finită. Cum $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup (X \setminus B)$, rezultă că $A \cap B$ este finită, deci $A \cap B \in Z(X)$;

iv) B şi $X \setminus A$ finite; analog cu iii).

Din cele de mai sus rezultă că oricare ar fi A, $B \in Z(X)$ există $A \wedge B = A \cap B \in Z(X)$.

Analog se demonstrează că oricare ar fi A, $B \in Z(X)$ există $A \vee B = A \cup B \in Z(X)$.

Cum $\emptyset$, $X \in Z(X)$ rezultă că $(Z(X), \subseteq)$ este o latice mărginită.

Fie $A \in Z(X)$. Dacă A este finită atunci $X \setminus A \in Z(X)$ deoarece $X \setminus (X \setminus A) = A$ este finită. Dacă $X \setminus A$ este finită, atunci $X \setminus A \in Z(X)$. Deci punând $A' = X \setminus A$ avem $A' \in Z(X)$ şi $A' \cap A = \emptyset$, $A' \cup A = X$, adică A' este complementul lui A, de unde rezultă că $(Z(X), \subseteq)$ este o latice Boole.

5.8. Să observăm că nu putem avea x, $x' \in F$ deoarece atunci $x \wedge x' = \mathbf{0} \in F$, adică $F = B$ – absurd.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Presupunem că F este ultrafiltru şi că $x \notin F$. Atunci $[F \cup \{x\}) = B$. Deoarece $\mathbf{0} \in B$, există $x_1, \ldots, x_n \in F$ a.î. $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge x = \mathbf{0}$, deci $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x'$, de unde concluzia că $x' \in F$ (căci $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$ şi F este un filtru).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Să presupunem că există un filtru propriu F_1 a.î. $F \subsetneq F_1$, adică există $x \in F_1 \setminus F$. Atunci $x' \in F$, deci $x' \in F_1$ şi cum $x \in F_1$ deducem că $\mathbf{0} \in F_1$, deci $F_1 = B$ – absurd. Deci F este ultrafiltru.

5.9. (i) $\Rightarrow$ (ii). Presupunem că $x \vee y \in F$ şi $x \notin F$. Atunci $[F \cup \{x\}) = B$ şi atunci cum $\mathbf{0} \in B$ există $z \in F$ a.î. $z \wedge x = \mathbf{0}$. Deoarece z, $x \vee y \in F$ rezultă că $z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y) =$ $= \mathbf{0} \vee (z \wedge y) = z \wedge y \in F$. Cum $z \wedge y \leq y$ deducem că $y \in F$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Cum pentru orice $x \in B$, $x \vee x' = 1$, deducem că $x \in F$ sau $x' \in F$ şi atunci conform problemei **5.8.** F este un ultrafiltru.

5.10. (i). Fie F filtru în B şi x', $y' \in F'$. Atunci $x' \vee y' = (x \wedge y)'$ şi cum $x, y \in F$ iar F este filtru, rezultă că $x' \vee y' \in F'$. Dacă $x' \in F'$ (cu $x \in F$) şi $y \leq x'$ rezultă că $(x')' \leq y'$, adică $x \leq y'$. Cum $x \in F$ şi F este filtru rezultă că $y' \in F$, deci $y = (y')' \in F'$. Astfel, F' este ideal.

(ii). Această afirmaţie este duala lui (ii).

(iii). Notăm cu $\overline{B} = F \cup F'$. Pentru ca $\overline{B}$ să fie subalgebră a lui B trebuie să demonstrăm că $\overline{B}$ este închisă la operaţiile $\wedge, \vee, '$.

Fie $x, y \in \overline{B}$. Avem posibilităţile:

1) $x, y \in F$. Cum F este filtru rezultă că $x \wedge y \in F \subseteq \overline{B}$ şi deoarece $x \leq x \vee y$ deducem că $x \vee y \in F \subseteq \overline{B}$.

2) $x \in F$ şi $y \in F'$. Cum $x \wedge y \leq y$ şi F' este ideal rezultă că $x \wedge y \in F' \subseteq \overline{B}$ iar din $x \leq x \vee y$ şi din faptul că F este filtru rezultă că $x \vee y \in F \subseteq \overline{B}$.

3) Analog dacă $x \in F'$ şi $y \in F$.

4) $x, y \in F'$ este duala primei situaţii.

Astfel $\overline{B}$ este închisă la operaţiile $\wedge, \vee$.

Fie $x \in \overline{B}$.

a) dacă $x \in F$, atunci $x' \in F' \subseteq \overline{B}$;

b) dacă $x \in F'$, atunci $x = z'$ cu $z \in F$ şi deci $x' = (z')' = z \in F \subseteq \overline{B}$.

Deci $\overline{B}$ este închisă şi la operaţia de complementare, şi astfel este o subalgebră a lui B.

Fie $x \in \overline{B}$ a.î. $x \notin F$. Atunci $x \in F'$ adică $x = y'$ cu $y \in F$, de unde deducem că $x' = y'' = y \in F$, ceea ce arată că F este ultrafiltru în $\overline{B}$ (conform problemei **5.8.**).

(iv). Completitudinea lui F(B) şi I(B) este evidentă (vezi problema **4.26.**).

Să arătăm de exemplu că $(F(B), \subseteq)$ este latice distributivă (dual se va arăta şi pentru $(I(B), \subseteq)$) iar pentru aceasta fie $F_1, F_2, F_3 \in F(B)$ şi $x \in F_1 \wedge (F_2 \vee F_3) = F_1 \cap [F_2 \cup F_3)$. Atunci $x \in F_1$ şi $x \geq (x_1^2 \wedge \ldots \wedge x_n^2) \wedge (x_1^3 \wedge \ldots \wedge x_m^3)$ cu $x_1^2, \ldots, x_n^2 \in F_2$ şi $x_1^3, \ldots, x_m^3 \in F_3$ (conform problemei **4.25.**). Atunci:

$x = x \vee [(x_1^2 \wedge \ldots \wedge x_n^2) \wedge (x_1^3 \wedge \ldots \wedge x_m^3)] = [(x \vee x_1^2) \wedge \ldots \wedge (x \vee x_n^2)] \wedge [(x \vee x_1^3) \wedge \ldots \wedge (x \vee x_m^3)] \in (F_1 \wedge F_2) \vee (F_1 \wedge F_3)$, de unde incluziunea $F_1 \wedge (F_2 \vee F_3) \subseteq (F_1 \wedge F_2) \vee (F_1 \wedge F_3)$, adică $(F(B), \subseteq)$ este distributivă (conform problemei **4.3.**).

5.11. (i). Presupunem că $A \cup \{x\}$ nu are (PIF). Atunci există o submulţime finită F a lui $A \cup \{x\}$ a.î. $\inf F = \mathbf{0}$. Deoarece A are (PIF) este evident că F trebuie să conţină pe x. Fie $F = \{f_1, \ldots, f_n, x\}$ şi deci $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n \wedge x = \mathbf{0}$. Cum $\{f_1, \ldots, f_n\}$ este o submulţime finită a lui A, rezultă că $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n \neq \mathbf{0}$ şi de aici $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n \wedge x' \neq \mathbf{0}$, deci $A \cup \{x'\}$ are (PIF).

(ii). Fie F o submulţime finită a lui $\bigcup_{i \in I} A_i$. Cum $(A_i)_{i \in I}$ este un lanţ faţă de incluziune rezultă că există $k \in I$ a.î. $F \subseteq A_k$ şi deoarece A_k are (PIF) deducem că $\inf F \neq \mathbf{0}$, ceea ce arată că $\bigcup_{i \in I} A_i$ are (PIF).

5.12. Fie $M_F = \{ F' \mid F'$ filtru propriu al lui B şi $F \subseteq F'\}$ (din $F \in M_F$ deducem că $M_F \neq \emptyset$). Cum se probează imediat că $(M_F, \subseteq)$ este inductivă, totul rezultă din lema lui Zorn.

5.13. Fie $A \subseteq B$ o submulţime ce are (PIF). Considerăm mulţimile:

$A^0 = \{ x \in B \mid (\exists)\ a \in A$ a.î. $a \leq x\}$ şi $A^c = \{ \inf X \mid X \subseteq A$, X finită$\}$.

Demonstrăm că mulţimea $(A^c)^0$ este un filtru ce conţine pe A.

Observăm întâi că $x \in (A^c)^0 \Leftrightarrow$ există $X \subseteq A$ finită a.î. $\inf X \leq x$.

Fie $x, y \in (A^c)^0$. Atunci există X,Y submulțimi finite ale lui A a.î. $\inf X \leq x$ şi $\inf Y \leq y$. X şi Y finite $\Rightarrow X \cup Y$ finită şi conform problemei **4.22.** din paragraful precedent avem $\inf (X \cup Y) = \inf X \wedge \inf Y$. Dar $\inf X \wedge \inf Y \leq x \wedge y$, deci $x \wedge y \in (A^c)^0$.

Fie $x \in (A^c)^0$ şi $x \leq y$. Atunci există X submulțime finită a lui A a.î. $\inf X \leq x$, deci $\inf X \leq y$, adică $y \in (A^c)^0$. Astfel am demonstrat că $(A^c)^0$ este un filtru.

Evident $A \subseteq A^c \subseteq (A^c)^0$.

Deoarece A are (PIF), oricare ar fi X o submulțime finită a lui A $\inf X \neq \mathbf{0}$, rezultă că $\mathbf{0} \notin (A^c)^0$, deci $(A^c)^0$ este un filtru propriu.

Conform teoremei filtrului prim (vezi problema **4.28.** sau **5.12.**), există un ultrafiltru U a.î. $(A^c)^0 \subseteq U$, deci $A \subseteq U$.

5.14. Dacă $x \neq \mathbf{0}$ atunci $\{x\}$ are (PIF) şi conform problemei anterioare există un ultrafiltru U_x al lui B a.î. $x \in U_x$ (sau aplicăm problema **5.12.** pentru $F = [x))$.

5.15. Dacă $x \neq y$ atunci $x \nleq y$ şi $y \nleq x$.

Considerăm că $x \nleq y$. Atunci $x \wedge y' \neq \mathbf{0}$ (dacă $x \wedge y' = \mathbf{0}$, atunci $x \leq y$, contradicție cu presupunerea noastră). Se aplică problema **5.14.** pentru elementul $x \wedge y'$; deci există U un ultrafiltru a.î. $x \wedge y' \in U$. Cum $x \wedge y' \leq x$, y' şi U este filtru rezultă că $x, y' \in U$, iar deoarece U este maximal avem că $y \notin U$.

5.16. „$\Rightarrow$". Fie $F = [X_0)$ cu $X_0 \subseteq I$, adică $F = \{Y \subseteq I \mid X_0 \subseteq \subseteq Y\}$. Atunci $\cap\{X \mid X \in F\} = X_0 \in F$.

„$\Leftarrow$". Dacă $X_0 = \cap\{X \mid X \in F\}$ atunci pentru orice $X \in F$, $X_0 \subseteq X$, adică $F = [X_0)$.

5.17. „$\Rightarrow$".Fie $F = [X_0)$ cu $\cap\{X \mid X \in F\} = X_0 \in I$ (conform problemei **5.16.**) şi să presupunem prin absurd că X_0 conține cel puțin două elemente diferite x, y. Cum F este ultrafiltru, $\{x\}$ sau $I \setminus \{x\}$ face parte din F. În primul caz $y \notin X_0$, iar în al doilea caz $x \notin X_0$ – absurd.

„$\Leftarrow$”. Fie $X_0 = \{x_0\}$. Atunci $F = \{X \subseteq I \mid x_0 \in X\}$ şi pentru orice $X \subseteq I$, $x_0 \in X$ sau $x_0 \in I \setminus X$, deci $X \in F$ sau $C_I X \in F$, adică F este ultrafiltru.

5.18. Presupunem prin absurd că F conține o mulțime finită şi fie X o astfel de mulțime de cardinal minim (cum F este propriu, $X \neq \emptyset$). Vom arăta că X conține un singur element. Dacă X conține două elemente diferite x, y atunci $\{x\} \notin F$ (ținând cont de alegerea lui X) deci $I \setminus \{x\} \in F$ şi prin urmare $X \cap (I \setminus \{x\}) =$ $= X \setminus \{x\} \in F$ – absurd (ținând din nou cont de alegerea lui X şi de faptul că $X \setminus \{x\} \neq \emptyset$).

Deci $X = \{x\}$ şi atunci $F = [\{x\})$ – absurd.

5.19. Fie $\mathcal{F}_I = \{X \subseteq I \mid I \setminus X \text{ este finită}\}$ care în mod evident are proprietatea intersecției finite. Conform problemei **5.13.** $\mathcal{F}_I$ se poate extinde la un ultrafiltru care din construcție nu conține mulțimi finite şi deci conform problemei **5.18** este neprincipal.

5.20. (i) $\Rightarrow$ (ii). Evident.

(ii) $\Rightarrow$ (i). $f(x) \wedge f(x') = f(x \wedge x') = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ şi analog $f(x) \vee f(x') = f(x \vee x') = f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, deci $f(x') = (f(x))'$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). f este morfism de sup – semilatici deoarece $f(x \vee y) = f(x'' \vee y'') = f((x' \wedge y')') = (f(x' \wedge y'))' = (f(x') \wedge f(y'))' =$ $= ((f(x))' \wedge (f(y))')' = f(x)'' \vee f(y)'' = f(x) \vee f(y)$.

Atunci $f(\mathbf{0}) = f(x \wedge x') = f(x) \wedge (f(x))' = \mathbf{0}$ şi analog $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, deci f este morfism de algebre Boole.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Evident.

(iv). Este afirmația duală lui (iii) şi deci echivalența (iv) $\Leftrightarrow$ (i) se demonstrează analog ca şi echivalența (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

5.21. Fie $x \in Ker\ (f)$ şi $y \in B_1$ a.î. $y \leq x$. Atunci, f fiind izotonă $\Rightarrow f(y) \leq f(x) = \mathbf{0} \Rightarrow f(y) = \mathbf{0} \Rightarrow y \in Ker\ (f)$. Dacă $x, y \in Ker\ (f)$ atunci în mod evident şi $x \vee y \in Ker\ (f)$, adică $Ker\ (f) \in I(B_1)$.

Să presupunem că $Ker\ (f) = \{\mathbf{0}\}$ şi fie $x, y \in Ker(f)$ a.î. $f(x) = f(y)$. Atunci $f(x \wedge y') = f(x) \wedge f(y') = f(x) \wedge f(y)' = f(x) \wedge f(x)' = \mathbf{0}$, deci $x \wedge y' \in Ker\ (f)$, adică $x \wedge y' = \mathbf{0}$, deci $x \leq y$ (conform problemei **5.3.** (iii).). Analog se arată că $y \leq x$, de unde $x = y$.

Implicația reciprocă este evidentă (deoarece $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$).

5.22. (i) $\Rightarrow$ (ii). f izomorfism $\Rightarrow$ f surjecție.

Orice morfism de latici este o funcție izotonă, deci $x \leq y \Rightarrow$

$f(x) \leq f(y)$.

Fie $f(x) \leq f(y)$. Atunci $f(x) = f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y)$ şi cum f este injectivă $\Rightarrow x = x \wedge y$, de unde $x \leq y$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii). Arătăm că f este injectivă. Fie $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ şi $f(y) \leq f(x) \Rightarrow x \leq y$ şi $y \leq x \Rightarrow x = y$. Cum f este şi surjecție, rezultă că f este bijecție, deci este inversabilă. Să demonstrăm de exemplu că $f^{-1}(x \wedge y) = f^{-1}(x) \wedge f^{-1}(y)$, oricare ar fi $x,y \in B_2$. Din $x,y \in B_2$ şi f surjecție rezultă că există x_1 şi $y_1 \in B_1$ a.î. $f(x_1) = x$ şi $f(y_1) = y$, deci $f^{-1}(x \wedge y) = f^{-1}(f(x_1) \wedge f(y_1)) = f^{-1}(f(x_1 \wedge y_1)) = x_1 \wedge y_1 = f^{-1}(f(x_1)) \wedge f^{-1}(f(y_1)) = f^{-1}(x) \wedge f^{-1}(y)$.

Analog $f^{-1}(x \vee y) = f^{-1}(x) \vee f^{-1}(y)$ şi $f^{-1}(x') = (f^{-1}(x))'$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). evident.

5.23. Analog ca în cazul laticilor (vezi problema **4.43.**).

5.24. Faptul că ($\mathbf{2}^{\mathbf{M}}$, $\le$) este latice Boole distributivă cu **0** şi **1** rezultă imediat din problema **4.20.**. Definind pentru $f : M \to \mathbf{2}$, $f' : M \to \mathbf{2}$, $f'(x) = \mathbf{1} - f(x)$, pentru orice $x \in M$, atunci f' va fi complementul lui f. Fie $X \in P(M)$ şi $\alpha_X : M \to \mathbf{2}$, $\alpha_X(y) = \begin{cases} 0, & dac\breve{a}\ \ y \notin X \\ 1, & dac\breve{a}\ \ y \in X \end{cases}$. Se verifică imediat că asocierea $X \to \alpha_X$ defineşte un izomorfism de latici Boole $\alpha : P(M) \to \mathbf{2}^{\mathbf{M}}$.

Observaţie. Cum algebra Boole $(P(M), \subseteq)$ este completă deducem că şi $(\mathbf{2}^{\mathbf{M}}, \le)$ este completă.

5.25. (i). Dacă $x, y \in B_a$ atunci în mod evident $x \wedge y$, $x \vee y$, x^*, $\mathbf{0}$, $a \in B_a$ (iar a joacă rolul lui **1** în B_a). De asemenea, $x \wedge x^* = x \wedge (x' \wedge a) = \mathbf{0} \wedge a = \mathbf{0}$ iar $x \vee x^* = x \vee (x' \wedge a) = (x \vee x') \wedge (x \vee a) = \mathbf{1} \wedge (x \vee a) = \mathbf{1} \wedge a = a$, de unde concluzia că x^* este complementul lui x în B_a;

(ii). Dacă $x,y \in B$ atunci $\alpha_a(x \vee y) = a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y) = \alpha_a(x) \vee \alpha_a(y)$, $\alpha_a(x \wedge y) = a \wedge (x \wedge y) = (a \wedge x) \wedge (a \wedge y) = \alpha_a(x) \wedge \alpha_a(y)$, $\alpha_a(x') = a \wedge x' = a \wedge (a' \vee x') = a \wedge (a \wedge x)' = (\alpha_a(x))^*$, $\alpha_a(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ iar $\alpha_a(\mathbf{1}) = a$, adică α_a este morfism surjectiv în B.

(iii). Se verifică uşor că $\alpha : B \to B_a \times B_{a'}$, $\alpha(x) = (a \wedge x, a' \wedge x)$, pentru $x \in B$ este morfism de latici Boole.

Pentru $(y,z) \in B_a \times B_{a'}$, cum $\alpha(y \vee z) = (a \wedge (y \vee z), a' \wedge (y \vee z)) = ((a \wedge y) \vee (a \wedge z), (a' \wedge y) \vee (a' \wedge z)) = (y \vee \mathbf{0}, \mathbf{0} \vee z) = (y, z)$, deducem că α este o surjecţie.

Fie acum $x,y \in B$ a.î. $\alpha(x) = \alpha(y)$. Atunci $a \wedge x = a \wedge y$ şi $a' \wedge x = a' \wedge y$, deci:

$(a \wedge x) \vee (a' \wedge x) = (a \wedge y) \vee (a' \wedge y)$

$\Leftrightarrow$ $(a \vee a') \wedge x = (a \vee a') \wedge y$

$\Leftrightarrow \mathbf{1} \wedge x = \mathbf{1} \wedge y \Leftrightarrow$ $x = y$,

de unde concluzia că α şi injecție, deci este izomorfism de latici Boole.

5.26. Demonstrăm că relația ~ este o relație de echivalență.

- *reflexivitatea*: $A \Delta A = \varnothing$ este finită;
- *simetria*: evident deoarece $A \Delta B = B \Delta A$;
- *tranzitivitatea:* dacă $A \sim B$ şi $B \sim C$, atunci $A \Delta B$ şi $B \Delta C$ sunt finite, cu $A, B, C \in P(\mathbb{N})$, se demonstrează uşor că $A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$ care este finită, deci $A \Delta C$ este finită, astfel că $A \sim C$.

Clasa de echivalență a lui A va fi $A^{\sim} = \{ B \in P(\mathbb{N}) \mid A \sim B\}$. Arătăm că relația $\leq$ definită pe $P(\mathbb{N})/\sim$ prin $A^{\sim} \leq B^{\sim} \Leftrightarrow A \setminus B$ finită este o relație de ordine:

- *reflexivitatea*: $A^{\sim} \leq A^{\sim}$ deoarece $A \setminus A = \varnothing$ finită;
- *antisimetria*: dacă $A^{\sim} \leq B^{\sim}$ şi $B^{\sim} \leq A^{\sim}$ atunci $A \setminus B$ şi $B \setminus A$ sunt finite. Rezultă că $A \Delta B$ este finită, deci $A \sim B$, adică $A^{\sim} = B^{\sim}$;
- *tranzitivitatea*: dacă $A^{\sim} \leq B^{\sim}$ şi $B^{\sim} \leq C^{\sim}$, atunci $A \setminus B$ şi $B \setminus C$ sunt finite. Dar $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ deci $A \setminus C$ este finită, adică $A^{\sim} \leq C^{\sim}$.

Am demonstrat astfel că $(P(\mathbb{N})/\sim, \leq)$ este o mulțime ordonată.

Dacă $A^{\sim}, B^{\sim} \in P(\mathbb{N})/\sim$, atunci $A^{\sim} \wedge B^{\sim} = (A \cap B)^{\sim}$ şi $A^{\sim} \vee B^{\sim} = (A \cup B)^{\sim}$.

Într-adevăr, pentru infimum avem $(A \cap B)^{\sim} \leq A^{\sim}, B^{\sim}$ deoarece $(A \cap B) \setminus A = \varnothing$ şi $(A \cap B) \setminus B = \varnothing$. Dacă $C^{\sim} \leq A^{\sim}, B^{\sim}$ atunci $C \setminus A$ şi $C \setminus B$ sunt finite, deci $(C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ este finită şi egală cu $C \setminus (A \cap B)$. Astfel $C \setminus (A \cap B)$ este finită, ceea ce arată că $C^{\sim} \leq (A \cap B)^{\sim}$.

Analog pentru supremum, şi astfel $(P(\mathbb{N})/\sim, \leq)$ devine o latice. Ea este mărginită, elementul minimal fiind $\emptyset^{\sim}$ iar elementul maximal $\mathbb{N}^{\sim}$.

Pentru distributivitate trebuie să arătăm că $A^{\sim} \wedge (B^{\sim} \vee C^{\sim}) = (A^{\sim} \wedge B^{\sim}) \vee (A^{\sim} \wedge C^{\sim}) \Leftrightarrow (A \cap (B \cup C))^{\sim} = ((A \cap B) \cup (A \cap C))^{\sim}$ ceea ce este adevărat deoarece $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Dacă $A^{\sim} \in P(\mathbb{N})/\sim$, atunci $(A^{\sim})' = (\mathbb{N} \setminus A)^{\sim}$, astfel că $(P(\mathbb{N})/\sim, \leq)$ este latice Boole.

5.27. (i). Dacă $x \rightarrow y = \mathbf{1}$ atunci $x' \vee y = \mathbf{1} \Leftrightarrow x \leq y$.

(iii). $x \rightarrow (y \rightarrow x) = x' \vee (y' \vee x) = \mathbf{1} \vee y' = \mathbf{1}$

Analog celelalte relaţii (vezi şi problema **4.48.**).

Observaţie. Din (xi) deducem că o algebră Boole este algebră Heyting, unde pentru $x, y \in B$, $x \rightarrow y = x' \vee y$.

5.28. (i). Fie $x \sim_F y \Leftrightarrow (\exists)\ f \in F$ a.î. $x \wedge f = y \wedge f$. Atunci $x' \vee (x \wedge f) = x' \vee (y \wedge f) \Rightarrow (x' \vee x) \wedge (x' \vee f) = (x' \vee y) \wedge (x' \vee f) \Rightarrow x' \vee f = (x' \vee y) \wedge (x' \vee f)$. Cum $f \in F$, F filtru şi $f \leq x' \vee f$ rezultă că $x' \vee f \in F \Rightarrow x' \vee y \in F$. Analog $x \vee y' \in F$, deci $x \leftrightarrow y \in F$, adică $x \approx_F y$.

Invers, dacă $x \approx_F y \Rightarrow x \leftrightarrow y \in F \Rightarrow (x' \vee y) \wedge (x \vee y') \in F \Rightarrow x' \vee y,\ x \vee y' \in F \Rightarrow$ există $f_1, f_2 \in F$ a .î. $x' \vee y = f_1$ şi $x \vee y' = f_2$. Atunci $x \wedge f_1 = x \wedge (x' \vee y) = (x \wedge x') \vee (x \wedge y) = x \wedge y$ şi analog $y \wedge f_2 = x \wedge y$, deci dacă $f = f_1 \wedge f_2 \in F$, atunci $x \wedge f = y \wedge f$.

(ii). Demonstrăm că ρ_F este o relaţie de congruenţă.

-*reflexivitatea*: $x\ \rho_F\ x$ deoarece $x' \vee x = \mathbf{1} \in F$.

- *simetria*: $x\ \rho_F\ y \Rightarrow (x' \vee y) \wedge (x \vee y') \in F \Rightarrow y\ \rho_F\ x$.

- *tranzitivitatea*: $x\ \rho_F\ y$ şi $y\ \rho_F\ z$ implică $x' \vee y$, $x \vee y'$, $y' \vee z$, $y \vee z' \in F$. Atunci $x' \vee z = x' \vee z \vee (y \wedge y') = (x' \vee z \vee y) \wedge (x' \vee z \vee y') \geq (x' \vee y) \wedge (y' \vee z)$. Deoarece $x' \vee y$, $y' \vee z \in F$ atunci $x' \vee z \in F$. Analog $x \vee z' \in F$, deci $x\ \rho_F\ z$.

Astfel am demonstrat că ρ_F este o relaţie de echivalenţă.

Demonstrăm compatibilitatea lui ρ_F cu operaţiile $\wedge, \vee, '$.

Fie $x \rho_F y$ şi $z \rho_F t$. Atunci $x' \vee y, z' \vee t \in F \Rightarrow (x' \vee y) \wedge$ $\wedge(z' \vee t) \in F$. Avem $(x' \vee y)\wedge(z' \vee t) \le (x'\vee y \vee t)\wedge(z' \vee t \vee y) =$ $= (x' \wedge z') \vee (y \vee t) = (x \vee z)' \vee (y \vee t)$, deci $(x \vee z)' \vee (y \vee t) \in F$. Analog $(y \vee t)' \vee (x \vee z)$, deci $(x \vee z) \rho_F (y \vee t)$.

Fie $x \rho_F y$. Atunci $x \leftrightarrow y \in F$ şi $x'\leftrightarrow y'=(x''\vee y')\wedge(y''\vee x')=$ $= (x \vee y') \wedge (x' \vee y) = x \leftrightarrow y$, deci $x' \rho_F y'$.

Fie $x \rho_F y$ şi $z \rho_F t$. Conform celor de mai sus $x' \rho_F y'$ şi $z' \rho_F t'$ şi cum ρ_F este compatibilă cu $\vee$, avem $(x' \vee z') \rho_F (y' \vee t')$ $\Leftrightarrow (x \wedge z)' \rho_F (y \wedge t)' \Leftrightarrow (x \wedge z) \rho_F (y \wedge t)$.

Cu aceasta am stabilit că ρ_F este o congruenţă.

(iii). Totul rezultă din faptul că ρ_F este o congruenţă pe B.

5.29. (i). Se verifică imediat prin dualizarea problemei **5.21.**.

(ii). Rezultă prin dualizarea problemei **5.21.**: dacă f este injectivă şi $x \in F_f$ atunci din $f(x) = \mathbf{1} = f(\mathbf{1}) \Rightarrow x = \mathbf{1}$. Dacă $F_f = \{\mathbf{1}\}$ şi $f(x) = f(y)$, atunci $f(x'\vee y) = f(x \vee y') = \mathbf{1}$, deci $x'\vee y = x \vee y' =$ $=\mathbf{1}$, adică $x \le y$ şi $y \le x$ (conform problemei **5.3.** (iv)), deci $x = y$.

(iii). Considerăm aplicaţia $\alpha : B_1/F_f \to f(B_1)$ definită prin $\alpha (x/F_f) = f(x)$, pentru orice $x/F_f \in B_1/F_f$.

Deoarece pentru $x,y \in B_1$: $x/F_f = y/F_f \Leftrightarrow x \sim_{F_f} y \Leftrightarrow$ $(x'\vee y)\wedge(x\vee y')\in F_f$ (conform problemei **5.28.**)$\Leftrightarrow f((x'\vee y)\wedge(x\vee y'))=$ $=\mathbf{1} \Leftrightarrow f(x'\vee y)=f(x\vee y')=\mathbf{1} \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow \alpha(x/F_f) = \alpha (y/F_f)$ deducem că α este corect definită şi injectivă.

Avem : $\alpha (x/F_f \vee y/F_f) = \alpha ((x \vee y)/F_f)=f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)=$ $= \alpha (x/F_f) \vee \alpha(x/F_f)$; analog se arată că $\alpha (x/F_f \wedge y/F_f) = \alpha (x/F_f) \wedge$ $\wedge \alpha(y/F_f)$ şi $\alpha (x'/F_f) = (\alpha(x/F_f))'$, deci α este morfism de latici Boole.

Fie $y = f(x) \in f(B_1), x \in B_1$; atunci $x/F_f \in B_1/F_f$ şi $\alpha(x/F_f) =$ $=f(x) = y$, deci α este surjectiv, adică izomorfism.

5.30. (i) $\Rightarrow$ (ii). Reamintim că $B/F = \{x/F \mid x \in B\}$ (vezi problema **5.28.**). Fie $x \in B$ a.î. $x/F \ne \mathbf{1}$. Atunci $x \notin F$ şi conform problemei **5.8.** $x'\in F$, adică $x'/F = \mathbf{1}$. Dar $(x/F)' = x'/F$, deci $x/F = (x/F)'' = \mathbf{1}' = \mathbf{0}$, de unde concluzia că $B/F = \{\mathbf{0},\mathbf{1}\} \approx \mathbf{2}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Dacă $x\notin F$ atunci $x/F \neq \mathbf{1}$, deci $x/F = \mathbf{0}$ iar $x'/F = (x/F)' = \mathbf{0}' = \mathbf{1}$, adică $x'\in F$ şi conform problemei **5.8.**, F este ultrafiltru.

5.31. Vom nota prin M mulțimea ultrafiltrelor lui B iar despre $u : B \to P(M)$, $u(x) = \{F\in M \mid x\in F\}$ vom arăta că este morfism injectiv de algebre Boole (astfel că B va fi izomorfă cu u(B))

Dacă $x,y\in B$ şi $x \neq y$ atunci conform problemei **5.15.** există $F\in M$ a.î. $x\in F$ şi $y\notin F$, adică $F\in u(x)$ şi $F\notin u(y)$, deci $u(x) \neq u(y)$.

În mod evident $u(0) = \varnothing$ şi $u(1) = M$.

Fie acum $x,y\in B$ şi $F\in M$. Avem: $F\in u(x\wedge y) \Leftrightarrow x \wedge y\in F \Leftrightarrow x\in F$ şi $y\in F$ deci $u(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$. Din problema **5.9.** deducem că $u(x \vee y) = u(x) \vee u(y)$, iar din problema **5.15.** deducem că $u(x') = (u(x))'$, adică u este şi morfism de algebre Boole.

5.32. Conform problemei **4.42.** $R(L) = \{ a\in L : a = a^{**}\}$ şi este sublatice mărginită a lui L. Dacă $a\in R(L)$, atunci $a = a^{**}$ şi conform problemei **4.39.** (v) şi $a^*\in R(L)$. Atunci $a \wedge a^* = \mathbf{0} \in R(L)$ iar $a \vee a^*$ (în R(L)) $= (a^* \wedge a^{**})^* = \mathbf{0}^* = \mathbf{1}$ (conform problemei **4.39.** (vii)), deci a^* este (în R(L)) complementul lui a.

5.33. (i). Evident, $A'(a) = \{x + y\cdot a \mid x,y\in A'\}$.

(ii). Cum C este complet, există $m_a = \bigvee_{\substack{x\in A'\\ x\leq a}} f(x)$ şi $M_a = \bigwedge_{\substack{x\in A'\\ a\leq x}} f(x)$ în C. Să observăm că $m_a \leq M_a$, aşa că putem alege $m_a \leq m \leq M_a$. Fie acum $z\in A'(a)$ şi să presupunem că pentru z avem două reprezentări: $z = x_1+ay_1 = x_2+ay_2$, cu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A'$. Atunci $x_1 + x_2 = a(y_1+y_2)$ adică $x_1 + x_2 \leq a$, de unde deducem că:

$$a(x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + \mathbf{1}) = a(x_1 + x_2) + a(y_1 + y_2) + a =$$
$$= a(y_1 + y_2) + a(y_1 + y_2) + a = a,$$
adică $a \leq x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + \mathbf{1}$. Ținând cont de aceste ultime relații ca şi de felul în care a fost ales m, deducem că $f(x_1) + f(x_2) \leq m \leq$ $\leq f(x_1) + f(x_2) + f(y_1) + f(y_2) + \mathbf{1}$, astfel că:
$$m = m(f(x_1) + f(x_2) + f(y_1) + f(y_2) + \mathbf{1}) =$$
$$= m(f(x_1) + f(x_2)) + m(f(y_1) + f(y_2)) + m =$$
$$= f(x_1) + f(x_2) + mf(y_1) + mf(y_2) + m,$$
de unde $f(x_1) + f(x_2) + mf(y_1) + mf(y_2) = \mathbf{0} \Leftrightarrow f(x_1) + mf(y_1) = f(x_2) + mf(y_2)$.

Această ultimă egalitate ne permite să definim pentru $z = x + ay \in A'(a)$, $f'(z) = f(x) + mf(y)$ şi acesta este morfismul căutat.

5.34. „$\Rightarrow$”. Rezultă din problema **5.9.**

„$\Leftarrow$”. Presupunem că laticea L conține un element a ce nu are complement. Considerăm filtrele $F_0 = \{x \in L \mid a \vee x = \mathbf{1}\}$ şi $F_1 = \{x \in L \mid a \wedge y \leq x$ pentru un $y \in F_0\}$. Atunci $0 \notin F_1$ căci altfel a ar fi complementat. Deci există un filtru prim P_1 a.î. $F_1 \subseteq P_1$ (vezi problema **4.32.**). Fie $I = ((L \setminus P_1) \cup \{a\}]$. Observăm că $L \setminus P_1 \subset I$ deoarece $a \in I$ şi $a \in F_1 \subseteq P_1$ implică $a \notin L \setminus P_1$.

Arătăm că $F_0 \cap I = \varnothing$. Dacă există $x \in F_0 \cap I$, atunci $x \in F_0$ şi deoarece $L \setminus P_1$ este un ideal, atunci $x \leq a \vee y$ pentru un $y \in L \setminus P_1$. Atunci $\mathbf{1} = a \vee x \leq a \vee y$ deci $y \in F_0 \subseteq F_1 \subseteq P_1$ – contradicție. Astfel, $F_0 \cap I = \varnothing$ şi astfel există un filtru prim P a.î. $F_0 \subseteq P$ şi $P \cap I = \varnothing$ (vezi problema **4.28.**). Atunci $P \subseteq L \setminus I \subset P_1$, adică P nu este maximal.

5.35. "$\Leftarrow$". Să presupunem că L este o latice Boole şi că există $P, Q \in Spec(L)$ a.î. $Q \subset P$, adică există $a \in P$ a.î. $a \notin Q$. Atunci $a' \notin P$ şi deci $a' \notin Q$. Astfel $a, a' \notin Q$ şi totuşi $a \wedge a' = \mathbf{0} \in Q$ contrazicând faptul că Q este ideal prim.

"$\Rightarrow$". Să presupunem acum că $(Spec(L), \subseteq)$ este neordonată şi fie prin absurd un element $a \in L$ pentru care nu există complementul său în L (în mod evident $a \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$).

Alegem $F_a = \{x \in L \mid a \vee x = \mathbf{1}\} \in F(L)$. Evident $a \notin F_a$ şi fie $D_a = [F_a \cup \{a\}) = \{x \in L \mid x \geq d \wedge a$ pentru un $d \in F_a\}$ (vezi problema **4.25.**).

În mod evident $\mathbf{0} \notin D_a$ deoarece în caz contrar ar exista $d \in F_a$ (deci $d \vee a = \mathbf{1}$) a.î. $d \wedge a = \mathbf{0}$, adică $d = a'$ - absurd.

Conform problemei **4.28.** există $P \in Spec(L)$ a.î. $P \cap D_a = \emptyset$. Atunci $\mathbf{1} \notin (a] \vee P$ (căci în caz contrar am avea $\mathbf{1} = a \vee p$ pentru un $p \in P$, adică $p \in D_a$ şi astfel $P \cap D_a \neq \emptyset$ - absurd).

Conform problemei **4.30.** există un ideal $Q \in Spec(L)$ a.î. $(a] \vee P \subseteq Q$. Am deduce că $P \subset Q$ contrazicând faptul că $(Spec(L), \subseteq)$ este o mulţime neordonată.

§6. Calculul propozițiilor

6.1. Considerăm următorul şir de formule:

$\varphi_1 = [\varphi\to([\varphi\to\varphi]\to\varphi)]\to[(\varphi\to[\varphi\to\varphi])\to(\varphi\to\varphi)]$

$\varphi_2 = \varphi\to([\varphi\to\varphi]\to\varphi)$

$\varphi_3 = (\varphi\to[\varphi\to\varphi])\to(\varphi\to\varphi)$

$\varphi_4 = \varphi\to[\varphi\to\varphi]$

$\varphi_5 = \varphi\to\varphi$.

Observăm că φ_1 este o axiomă de forma A_2, φ_2 este o axiomă de tipul A_1, φ_3 este o consecință imediată a lui φ_1 şi φ_2 (m.p.), φ_4 este o axiomă de tipul A_1, iar φ_5 este o consecință imediată a lui φ_3 şi φ_4 (m.p.). Deci $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ este o demonstrație a lui φ_5, de unde concluzia că $\vdash \varphi_5$.

6.2. Considerăm următorul şir de formule:

$\varphi_1 = [\varphi\to(\psi\to\chi)]\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]$

$\varphi_2 = ([\varphi\to(\psi\to\chi)]\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)])\to$
$\to((\psi\to\chi)\to([\varphi\to(\psi\to\chi)]\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]))$

$\varphi_3 = (\psi\to\chi)\to([\varphi\to(\psi\to\chi)]\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)])$

$\varphi_4 = ((\psi\to\chi)\to([\varphi\to(\psi\to\chi)]\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]))\to$
$\to([(\psi\to\chi)\to[\varphi\to(\psi\to\chi)]]\to[(\psi\to\chi)\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]])$

$\varphi_5 = [(\psi\to\chi)\to[\varphi\to(\psi\to\chi)]]\to[(\psi\to\chi)\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]]$

$\varphi_6 = (\psi\to\chi)\to[\varphi\to(\psi\to\chi)]$

$\varphi_7 = (\psi\to\chi)\to[(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\chi)]$.

Observăm că φ_1 este o axiomă de tipul A_2, φ_2 este o axiomă de tipul A_1, φ_3 este o consecință imediată a lui φ_1 şi φ_2 (m.p.), φ_4 este o axiomă de tipul A_2, φ_5 este o consecință imediată a lui φ_3 şi φ_4 (m.p.), φ_6 este o axiomă de tipul A_1 iar φ_7 este o consecință imediată a lui φ_5 şi φ_6 (m.p.).

Deci $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7\}$ este o demonstrație a lui φ_7, de unde concluzia că $\vdash \varphi_7$.

6.3. Considerăm următorul şir de formule:

$\varphi_1 = (\rceil\psi\to\rceil\varphi)\to(\varphi\to\psi)$

$\varphi_2 = [(\rceil\psi\to\rceil\varphi)\to(\varphi\to\psi)]\to([\rceil\varphi\to(\rceil\psi\to\rceil\varphi)]\to[\rceil\varphi\to(\varphi\to\psi)])$

$\varphi_3 = [\rceil\varphi\to(\rceil\psi\to\rceil\varphi)]\to[\rceil\varphi\to(\varphi\to\psi)])$

$\varphi_4 = \rceil\varphi\to(\rceil\psi\to\rceil\varphi)$

$\varphi_5 = \rceil\varphi\to(\varphi\to\psi)$.

Observăm că φ_1 este o axiomă de tipul A_3, φ_2 rezultă din problema **6.2.**, φ_3 este o consecință imediată a lui φ_1 şi φ_2 (m.p.), φ_4 este o axiomă de tipul A_1, iar φ_5 este o consecință imediată a lui φ_3 şi φ_4 (m.p.).

6.4. Conform problemei **6.1.** avem că $\vdash \rceil(\varphi\wedge\rceil\varphi)$. Înlocuind pe φ cu $\rceil\varphi$ obținem că că $\vdash \rceil(\rceil\varphi\wedge\rceil\rceil\varphi)$, adică $\vdash \varphi\vee\rceil\varphi$.

6.5. (i). Reamintim că $\Gamma\vdash\varphi$ (adică φ se deduce din ipotezele Γ) dacă şi numai dacă următoarele condiții sunt verificate:

(D_1) φ este axiomă,

(D_2) $\varphi\in\Gamma$,

(D_3) Există $\psi\in\Gamma$ a.î. $\Gamma\vdash\psi$ şi $\Gamma\vdash(\psi\to\varphi)$,

astfel că totul se deduce imediat făcând un fel de inducție asupra conceptului $\Gamma\vdash\varphi$.

(ii). Ținem cont de condițiile (D_1)-(D_3). Dacă φ este axiomă atunci $\emptyset\vdash\varphi$ şi deci putem alege $\Gamma' = \emptyset$. Dacă $\varphi\in\Gamma$ atunci alegem $\Gamma'=\{\varphi\}$. Dacă există $\psi\in\Gamma$ a.î. $\Gamma\vdash\psi$ şi $\Gamma\vdash(\psi\to\varphi)$, atunci există Γ_1', $\Gamma_2'\subseteq\Gamma$ finite a.î. $\Gamma_1'\vdash\psi$ şi $\Gamma_2'\vdash(\psi\to\varphi)$. Considerăm $\Gamma' = \Gamma_1' \cup \Gamma_2'$ şi aplicăm (i).

(iii). Analog ca (i) şi (ii) ținând cont de condițiile (D_1)-(D_3).

6.6. „$\Rightarrow$”. Se aplică problema **6.5.** şi modus ponens.

„$\Leftarrow$”. Facem un fel de inducție.

Dacă $\Gamma\cup\{\varphi\} \vdash \psi$ atunci avem cazurile:

(1). ψ este o axiomă. Cum $\vdash \psi$ şi $\vdash \psi\to(\varphi\to\psi)$ (conform cu A_1), atunci $\vdash \varphi\to\psi$ (prin m. p.), deci $\Gamma \vdash \varphi\to\psi$.

(2). $\psi\in\Gamma\cup\{\varphi\}$, cu două subcazuri:

(a) $\psi\in\Gamma$. Atunci din $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \psi\to(\varphi\to\psi)$ se deduce $\Gamma \vdash \varphi\to\psi$.

(b) $\psi\in\{\varphi\}$. Atunci se aplică principiul identităţii (problema **6.1.**)

(3). Există $\theta\in F$ a.î. $\Gamma\cup\{\varphi\} \vdash \theta$ şi $\Gamma\cup\{\varphi\} \vdash \theta\to\psi$.

Aplicând ipoteza de inducţie rezultă $\Gamma \vdash \varphi\to\theta$ şi $\Gamma \vdash \varphi\to(\theta\to\psi)$. De asemenea, conform cu A_2, avem:

$$\Gamma \vdash (\varphi\to(\theta\to\psi))\to((\varphi\to\theta)\to(\varphi\to\psi))$$

şi astfel aplicând de două ori m. p. se obţine că $\Gamma \vdash \varphi\to\psi$.

6.7. Vom aplica succesiv modus ponens şi apoi teorema deducţiei (problema **6.6**.):

$\{\varphi\to\psi, \psi\to\chi, \varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi\to\psi, \psi\to\chi, \varphi\} \vdash \varphi\to\psi$

$\{\varphi\to\psi, \psi\to\chi, \varphi\} \vdash \psi$ (m.p.)

$\{\varphi\to\psi, \psi\to\chi, \varphi\} \vdash \psi\to\chi$

$\{\varphi\to\psi, \psi\to\chi, \varphi\} \vdash \chi$ (m.p.)

$\{\varphi\to\psi, \psi\to\chi\} \vdash \varphi\to\chi$ (t.d.)

$\{\varphi\to\psi\} \vdash (\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi)$ (t.d.),

deci $\vdash (\varphi\to\psi) \to((\psi\to\chi)\to(\varphi\to\chi))$, conform cu t.d..

Observaţie. Din problema **6.7.** deducem următoarea regulă de deducţie derivată:

(R_1): Dacă $\vdash \varphi \to \psi$ şi $\vdash \psi \to \chi$, atunci $\vdash \varphi \to \chi$.

6.8. Aplicăm modus ponens şi apoi teorema deducţiei după următoarea schemă:

$\{\varphi, \psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \varphi$

$\{\varphi, \psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \varphi\to(\psi\to\chi)$

$\{\varphi, \psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash (\psi\to\chi)$ (m.p.)

$\{\varphi, \psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \psi$

$\{\varphi, \psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \chi$ (m.p.)

$\{\psi, \varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \varphi\to \chi$ (t.d.)

$\{\varphi\to(\psi\to\chi)\} \vdash \psi\to(\varphi\to\chi)$ (t.d.),

de unde deducem în final că $\vdash (\varphi\to(\psi\to\chi))\to(\psi\to(\varphi\to\chi))$, conform cu t.d..

Observație. Din problema **6.8.** deducem o altă regulă de deducție derivată:

(R_2): Dacă $\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$, atunci $\vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$.

6.9. Raționăm după următoarea schemă ce se deduce din A_1-A_3, modus ponens şi teorema deducției:

$\{\varphi, \rceil\varphi\} \vdash \rceil\varphi\to(\rceil\psi\to\rceil\varphi)$ (A_1)

$\{\varphi, \rceil\varphi\} \vdash \rceil\varphi$

$\{\varphi, \rceil\varphi\} \vdash \rceil\psi\to\rceil\varphi$ (m.p.)

$\{\varphi, \rceil\varphi\} \vdash (\rceil\psi\to\rceil\varphi)\to(\varphi\to\psi)$ (A_3)

$\{\varphi, \rceil\varphi\} \vdash \varphi\to\psi$ (m.p.)

$\{\varphi, \rceil\varphi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi, \rceil\varphi\} \vdash \psi$ (m.p.)

$\{\varphi\} \vdash \rceil\varphi\to\psi$ (t.d.),

de unde concluzia că $\vdash \varphi \to (\rceil\varphi \to \psi)$, conform cu t.d..

6.10. Conform problemei **6.8.** avem

$\vdash (\varphi\to(\rceil\varphi\to\psi))\to(\rceil\varphi\to(\varphi\to\psi))$,

de unde aplicând problema **6.9.** şi m. p. deducem că $\vdash \rceil\varphi \to (\varphi \to \psi)$.

6.11. Raționăm după următoarea schemă ce se deduce din A_1-A_3, modus ponens şi teorema deducției:

$\{\rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\varphi\to(\rceil\rceil\rceil\rceil\varphi\to\rceil\rceil\varphi)$ (A_1)

$\{\rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\varphi$

$\{\rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\rceil\rceil\varphi\to\rceil\rceil\varphi$ (m.p.)

$\{\rceil\rceil\varphi\} \vdash (\rceil\rceil\rceil\rceil\varphi\to\rceil\rceil\varphi)\to(\rceil\varphi\to\rceil\rceil\rceil\varphi)$ (A_3)

$\{\rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\varphi\to\rceil\rceil\rceil\varphi$ (m.p.)

$\{\rceil\rceil\varphi\} \vdash (\rceil\varphi\to\rceil\rceil\rceil\varphi)\to(\rceil\rceil\varphi\to\varphi)$ (A_3)

$\{\rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\varphi\to\varphi$ (m.p.)

$\{\rceil\rceil\varphi\} \vdash \varphi$,

de unde concluzia finală că $\vdash \rceil\rceil\varphi \to \varphi$, conform cu t.d..

6.12. Raționăm după următoarea schemă ce se deduce din A_1-A_3, modus ponens şi teorema deducției:

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\varphi\to\varphi$ (probl. **6.11.**)

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\varphi$

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \varphi$ (m.p.)

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \varphi\to\psi$

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \psi$ (m.p.)

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\psi$

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\psi\to(\psi\to\rceil\rceil\psi)$ (probl. **6.10.**)

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\psi$ (m.p. de două ori)

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi\} \vdash \rceil\rceil\varphi \to \rceil\rceil\psi$ (t.d.)

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi\} \vdash (\rceil\rceil\varphi \to \rceil\rceil\psi)\to(\rceil\psi\to\rceil\varphi)$ (A_3)

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi\} \vdash \rceil\psi \to \rceil\varphi$ (m.p.)

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi\} \vdash \rceil\psi$

$\{\varphi\to\psi, \rceil\psi\} \vdash \rceil\varphi$ (m.p.)

$\{\varphi\to\psi\} \vdash \rceil\psi \to \rceil\varphi$ (t.d.), de unde concluzia finală că $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\rceil\psi \to \rceil\varphi)$, conform cu t.d..

6.13. Raționăm după următoarea schemă ce se deduce din problema **6.11.**, A_1-A_3, modus ponens şi teorema deducției:

$\{\varphi, \rceil\rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\rceil\varphi\to\rceil\varphi$	(probl. **6.11.**)
$\{\varphi, \rceil\rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\rceil\varphi$	
$\{\varphi, \rceil\rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\varphi$	(m.p.)
$\{\varphi\} \vdash \rceil\rceil\rceil\varphi \to \rceil\varphi$	(t.d.)
$\{\varphi\} \vdash (\rceil\rceil\rceil\varphi \to \rceil\varphi)\to(\varphi\to\rceil\rceil\varphi)$	(A_3)
$\{\varphi\} \vdash \varphi\to\rceil\rceil\varphi$	(m.p.)
$\{\varphi\} \vdash \varphi$	
$\{\varphi\} \vdash \rceil\rceil\varphi$	(m.p.),

de unde concluzia finală că $\vdash \varphi \to \rceil\rceil\varphi$, conform cu t.d..

6.14. Raționăm după următoarea schemă ce se deduce din problemele **6.1.**, **6.9.**, **6.11.**, A_1-A_3, modus ponens şi teorema deducției:

$\{\varphi \to \rceil\varphi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\varphi\to\varphi$	(probl. **6.11.**)
$\{\varphi \to \rceil\varphi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\varphi$	
$\{\varphi \to \rceil\varphi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \varphi$	(m.p.)
$\{\varphi \to \rceil\varphi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \varphi\to\rceil\varphi$	
$\{\varphi \to \rceil\varphi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil\varphi$	(m.p.)
$\{\varphi \to \rceil\varphi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \varphi\to(\rceil\varphi\to\rceil(\varphi\to\varphi))$	(probl. **6.9.**)
$\{\varphi \to \rceil\varphi, \rceil\rceil\varphi\} \vdash \rceil(\varphi\to\varphi)$	(m.p. de două ori)
$\{\varphi \to \rceil\varphi\} \vdash \rceil\rceil\varphi \to \rceil(\varphi\to\varphi)$	(t.d.)
$\{\varphi \to \rceil\varphi\} \vdash (\rceil\rceil\varphi \to \rceil(\varphi\to\varphi))\to((\varphi\to\varphi)\to\rceil\varphi)$	(A_3)
$\{\varphi \to \rceil\varphi\} \vdash (\varphi\to\varphi)\to\rceil\varphi$	(m.p.)
$\{\varphi \to \rceil\varphi\} \vdash \varphi\to\varphi$	(probl. **6.1.**)

$\{\varphi \to \rceil\varphi\} \vdash \rceil\varphi$ (m.p.),

de unde concluzia că $\vdash (\varphi \to \rceil\varphi) \to \rceil\varphi$.

6.15. Raționăm după următoarea schemă de demonstrație:

$\{\varphi, \varphi\to\psi\} \vdash \psi$ (m.p.)

$\{\varphi\} \vdash (\varphi\to\psi) \to \psi$ (t.d.)

$\{\varphi\} \vdash ((\varphi\to\psi) \to \psi)\to(\rceil\psi\to\rceil(\varphi\to\psi))$ (probl. **6.12.**)

$\{\varphi\} \vdash \rceil\psi\to\rceil(\varphi\to\psi)$ (m.p.),

de unde concluzia finală că $\vdash \varphi \to (\rceil\psi \to \rceil(\varphi \to \psi))$, conform cu t.d..

6.16. Rezultă imediat din problema **6.9.**.

6.17. Problema este echivalentă cu $\vdash \psi \to (\rceil\varphi \to\psi)$ pentru care avem următoarea schemă:

$\{\psi, \rceil\varphi\} \vdash \psi$

$\{\psi\} \vdash \rceil\varphi \to \psi$ (t.d.),

de unde deducem în final că $\vdash \psi \to (\rceil\varphi \to \psi)$, conform cu t.d..

6.18. Raționăm după următoarea schemă de demonstrație:

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \rceil\varphi\to\psi$

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \psi \to\chi$

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \rceil\varphi\to\chi$ (R_1)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash (\rceil\varphi\to\chi)\to(\rceil\chi\to\rceil\rceil\varphi)$ (probl. **6.12.**)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \rceil\chi\to\rceil\rceil\varphi$ (m.p.)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \rceil\rceil\varphi\to\varphi$ (probl. **6.11.**)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \rceil\chi\to\varphi$ (R_1)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \varphi\to\chi$

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \rceil\chi\to\chi$ (R_1)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash (\rceil\chi\to\chi)\to(\rceil\chi\to\rceil\rceil\chi)$ (probl.**6.12.**)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \rceil\chi\to\rceil\rceil\chi$ (m.p.)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash (\rceil\chi\to\rceil\rceil\chi)\to\rceil\rceil\chi$ (probl. **6.14.**)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \rceil\rceil\chi$ (m.p.)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \rceil\rceil\chi\to\chi$ (probl. **6.11.**)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi, \rceil\varphi\to\psi\} \vdash \chi$ (m.p.)

$\{\varphi\to\chi, \psi\to\chi\} \vdash (\rceil\varphi\to\psi) \to \chi$ (t.d.).

Aplicând încă de două ori t.d. deducem în final că

$\vdash (\varphi \to \chi) \to [(\psi \to \chi) \to((\rceil\varphi \to \psi) \to \chi)]$.

Observație. Din problema **6.18.** deducem o altă regulă de deducție derivată:

(R_3): Dacă $\vdash (\varphi \to \chi)$ şi $\vdash (\psi \to \chi)$, atunci $\vdash \varphi\vee\psi \to \chi$.

6.19. Raționăm după următoarea schemă de demonstrație:

$\vdash \varphi \to (\rceil\varphi \to\rceil\psi)$ (probl. **6.9.**)

$\vdash \rceil\varphi \to (\varphi \to\rceil\psi)$ (R_2)

$\vdash (\rceil\varphi \to (\varphi \to \rceil\psi)) \to (\rceil(\varphi \to\rceil\psi) \to \rceil\rceil\varphi)$ (probl.**6.12.**)

$\vdash \rceil (\varphi \to \rceil\psi) \to \rceil\rceil\varphi$ (m.p.)

$\vdash \rceil\rceil\varphi \to \varphi$ (probl. **6.11.**)

$\vdash \rceil(\varphi \to\rceil\psi) \to \varphi$ (R_1),

de unde concluzia finală că $\vdash \varphi\wedge\psi \to \varphi$.

6.20. Raționăm după următoarea schemă de demonstrație:

$\vdash \rceil\psi \to (\varphi \to\rceil\psi)$ (A_1)

$\vdash (\rceil\psi \to (\varphi \to\rceil\psi)) \to (\rceil(\varphi \to\rceil\psi) \to\rceil\rceil\psi)$ (probl.**6.12.**)

$\vdash \rceil(\varphi \to\rceil\psi) \to\rceil\rceil\psi$ (m.p.)

$\vdash \rceil\rceil\psi \to \psi$ (probl. **6.11.**)

$\vdash \rceil(\varphi \to\rceil\psi) \to \psi$ (R_1),

de unde concluzia finală că $\vdash \varphi\wedge\psi \to \psi$.

6.21. Raționăm după următoarea schemă de demonstrație:

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \chi$

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \chi \to \varphi$

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \chi \to \psi$

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \varphi$ (m.p.)

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \psi$ (m.p.)

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \psi\to\rceil\rceil\psi$ (probl. **6.13.**)

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \rceil\rceil\psi$ (m.p.)

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \varphi\to(\rceil\rceil\psi\to\rceil(\varphi\to\rceil\psi))$ (probl. **6.15.**)

$\{\chi\to\varphi, \chi\to\psi, \chi\} \vdash \rceil(\varphi\to\rceil\psi)$ (m.p. de două ori).

Folosind acum t.d. de trei ori se obține în final că

$\vdash (\chi \to \varphi) \to ((\chi \to \psi) \to (\chi \to \varphi\wedge\psi))$.

Observație. Din problema **6.21.** deducem o altă regulă de deducție derivată:

(R_4): Dacă $\vdash \chi \to \varphi$ şi $\vdash \chi \to \psi$, atunci $\vdash \chi \to \varphi\wedge\psi$.

6.22. Folosim următoarea schemă:

$\vdash \varphi\wedge\psi \to \psi$ (probl. **6.20.**)

$\vdash \varphi\wedge\psi \to \varphi$ (probl. **6.19.**)

$\vdash \varphi\wedge\psi \to \psi\wedge\varphi$ (R_4).

6.23. Folosim următoarea schemă de demonstrație:

$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi, \psi\} \vdash \psi$

$\{\varphi, \psi\} \vdash \psi \to \rceil\rceil\psi$ (probl. **6.13.**)

$\{\varphi, \psi\} \vdash \rceil\rceil\psi$ (m.p.)

$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \to (\rceil\rceil\psi \to\rceil(\varphi \to\rceil\psi))$ (probl. **6.15.**)

$\{\varphi, \psi\} \vdash \rceil(\varphi \to\rceil\psi)$ (m.p. de două ori), de unde utilizând t.d. de două ori deducem că $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi\wedge\psi)$.

6.24. Folosim următoarea schemă:

$\vdash \varphi\wedge\chi \to \varphi$ (probl. **6.19.**)

$\vdash \varphi \to \varphi\vee\psi$ (probl. **6.16.**)

$\vdash \varphi\wedge\chi \to \varphi\vee\psi$ (R_1)

$\vdash \varphi\wedge\chi \to \chi$ (probl. **6.20.**)

$\vdash \varphi\wedge\chi \to (\varphi\vee\psi)\wedge\chi$ (R_4)

$\vdash \psi \wedge\chi \to (\varphi\vee\psi)\wedge\chi$ (analog)

$\vdash (\varphi\wedge\chi)\vee(\psi\wedge\chi) \to ((\varphi\vee\psi)\wedge\chi)$ (R_3).

6.25. Folosim următoarea schemă de demonstrație:

$\{\chi\to\theta, \varphi\to(\psi\to\chi), \varphi, \psi\} \vdash \varphi\to(\psi\to\chi)$

$\{\chi\to\theta, \varphi\to(\psi\to\chi), \varphi, \psi\} \vdash \varphi$

$\{\chi\to\theta, \varphi\to(\psi\to\chi), \varphi, \psi\} \vdash \psi\to\chi$ (m.p.)

$\{\chi\to\theta, \varphi\to(\psi\to\chi), \varphi, \psi\} \vdash \psi$

$\{\chi\to\theta, \varphi\to(\psi\to\chi), \varphi, \psi\} \vdash \chi$ (m.p.)

$\{\chi\to\theta, \varphi\to(\psi\to\chi), \varphi, \psi\} \vdash \chi\to\theta$

$\{\chi\to\theta, \varphi\to(\psi\to\chi), \varphi, \psi\} \vdash \theta$ (m.p.),

iar apoi se aplică t.d. de patru ori.

6.26. Folosim următoarea schemă de demonstrație:

$\{\varphi\to(\psi\to\chi), \varphi\wedge\psi\} \vdash \varphi\wedge\psi$

$\{\varphi\to(\psi\to\chi), \varphi\wedge\psi\} \vdash \varphi\wedge\psi\to\varphi$ (probl.**6.19.**)

$\{\varphi\to(\psi\to\chi), \varphi\wedge\psi\} \vdash \varphi$ (m.p.)

$\{\varphi\to(\psi\to\chi), \varphi\wedge\psi\} \vdash \psi$ (analog)

$\{\varphi\to(\psi\to\chi), \varphi\wedge\psi\} \vdash \varphi\to(\psi\to\chi)$

$\{\varphi\to(\psi\to\chi), \varphi\wedge\psi\} \vdash \chi$ (m.p. de două ori)

iar apoi se aplică t.d. de două ori.

6.27. Folosim următoarea schemă de demonstrație:

$\{\varphi\wedge\psi\to\chi, \varphi, \psi\} \vdash \varphi$

$\{\varphi\wedge\psi\to\chi, \varphi, \psi\} \vdash \psi$

$\{\varphi\wedge\psi\to\chi, \varphi, \psi\} \vdash \varphi\to(\psi\to\varphi\wedge\psi)$ (probl. **6.23.**)

$\{\varphi\wedge\psi\to\chi, \varphi, \psi\} \vdash \varphi\wedge\psi$ (m.p. de două ori)

$\{\varphi\wedge\psi\to\chi, \varphi, \psi\} \vdash \varphi\wedge\psi\to\chi$

$\{\varphi\wedge\psi\to\chi, \varphi, \psi\} \vdash \chi$ (m.p.)

iar apoi se aplică t.d. de trei ori.

6.28. Conform t.d. problema se reduce la a demonstra că:

$\{\varphi\vee\psi, \chi\} \vdash \rceil(\varphi\wedge\chi)\to(\psi\wedge\chi)$,

ceea ce este echivalent cu a demonstra că

$\{\varphi\vee\psi, \chi\} \vdash \rceil\rceil(\varphi \to\rceil\chi)\to\rceil(\psi \to\rceil\chi)$,

pentru care folosim următoarea schemă de demonstrație:

$\{\rceil\varphi\to\psi, \chi, \rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\} \vdash \rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)$

$\{\rceil\varphi\to\psi,\chi,\rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\}\vdash(\rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi))\to(\varphi\to\rceil\chi)$ (probl. **6.11.**)

$\{\rceil\varphi\to\psi,\chi,\rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\}\vdash(\varphi\to\rceil\chi)$ (m.p.)

$\{\rceil\varphi\to\psi, \chi, \rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\} \vdash \chi\to\rceil\varphi$ (A_3, m.p.)

$\{\rceil\varphi\to\psi, \chi, \rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\} \vdash \rceil\varphi\to\psi$

$\{\rceil\varphi\to\psi, \chi, \rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\} \vdash \chi\to\psi$ (R_1)

$\{\rceil\varphi\to\psi, \chi, \rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\} \vdash \chi$

$\{\rceil\varphi\to\psi, \chi, \rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\} \vdash \psi$ (m.p.)

$\{\rceil\varphi\to\psi, \chi, \rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\} \vdash \psi\to(\chi\to\rceil(\psi\to\rceil\chi)$ (probl. **6.15.**)

$\{\rceil\varphi\to\psi, \chi, \rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\} \vdash \rceil(\psi\to\rceil\chi)$ (m.p. de două ori)

$\{\rceil\varphi\to\psi, \chi\}\vdash\rceil\rceil(\varphi\to\rceil\chi)\}\to \rceil(\psi\to\rceil\chi)$ (t.d.).

6.29. Rezultă din problema **6.28.** cu ajutorul problemelor **6.26.** şi **6.27.**.

6.30. Pentru $\vdash \varphi\wedge\urcorner\varphi \to\psi$ avem următoarea demonstrație formală:

$\vdash \varphi\to(\urcorner\varphi\to\psi)$ (probl. **6.9.**)

$\vdash (\varphi\to(\urcorner\varphi\to\psi))\to(\varphi\wedge\urcorner\varphi\to\psi)$ (probl. **6.26.**),

deci

$\vdash \varphi\wedge\urcorner\varphi\to\psi$ (m.p.).

Conform principiului identității (problema **6.1.**), $\{\psi\}\vdash\urcorner\varphi\to\urcorner\varphi$, de unde conform teoremei deducției (problema **6.6.**), $\vdash\psi\to(\urcorner\varphi\to\urcorner\varphi)$, adică $\vdash\psi\to\varphi\vee\urcorner\varphi$.

Observație. Principiul identității sub forma $\vdash \urcorner\varphi\to\urcorner\varphi$ ne dă $\vdash \varphi\vee\urcorner\varphi$ (adică *principiul terțului exclus*).

6.31. Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci conform problemei **6.5.**, există $\gamma_1, \dots, \gamma_n\in\Gamma$, a.î. $\{ \gamma_1, \dots, \gamma_n\} \vdash \varphi$. Aplicând de n ori teorema deducției deducem că:

$$\vdash \gamma_1\to (\gamma_2\to \dots \to (\gamma_n \to \varphi)\dots)$$

Ținând cont de problema **6.26.** avem că $\vdash \bigwedge_{i=1}^{n}\gamma_i \to\varphi$.

Reciproc, din $\vdash \bigwedge_{i=1}^{n}\gamma_i \to\varphi$ cu $\gamma_1, \dots, \gamma_n\in\Gamma$, deducem conform problemei **6.27.**,

$$\vdash \gamma_1\to (\gamma_2\to \dots \to (\gamma_n \to \varphi)\dots)$$

Conform teoremei deducției aplicată în sens invers obținem că

$$\{ \gamma_1, \dots, \gamma_n\} \vdash \varphi, \text{ deci } \Gamma \vdash \varphi.$$

6.32. (i)$\Rightarrow$(ii). Notăm prin Prov mulțimea formulelor demonstrabile. Dacă avem $\varphi\in$Prov, adică $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$ şi conform ipotezei $\varphi\in\Sigma$, adică Prov $\subseteq\Sigma$.

Să presupunem acum că pentru $\alpha, \beta \in F$ avem $\alpha, \alpha \to \beta \in \Sigma$. Atunci $\Sigma \vdash \alpha$, $\Sigma \vdash (\alpha \to \beta)$ şi deci $\Sigma \vdash \beta$ (m.p.), adică $\beta \in \Sigma$.

(ii)$\Rightarrow$(i). Fie $\varphi \in F$ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Conform problemei **6.5.** există $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$, a. î. $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \varphi$. Conform cu t.d. (problema **6.6.**) avem că

$$\vdash \sigma_1 \to (\ldots \to (\sigma_n \to \varphi) \ldots)$$

şi cum $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ deducem că $\varphi \in \Sigma$.

6.33. „$\Rightarrow$”. Să presupunem că $\vdash \varphi, \psi$.

Cum $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$ (conform problemei **6.23.**), prin aplicarea de două ori a m.p. deducem că $\vdash \varphi \wedge \psi$.

„$\Leftarrow$”. Rezultă imediat din problemele **6.19.** şi **6.20.**.

6.34. Faptul că relaţia $\le$ este reflexivă şi tranzitivă rezultă din problemele **6.1.** şi **6.7.**. Din problema **6.22.** deducem că dacă $\varphi \neq \psi$ atunci $\varphi \wedge \psi \lneqq \psi \wedge \varphi$, $\psi \wedge \varphi \lneqq \varphi \wedge \psi$, pe când $\varphi \wedge \psi \neq \psi \wedge \varphi$, de unde concluzia că relaţia $\le$ nu este antisimetrică şi deci este doar o relaţie de ordine parţială.

6.35. Se observă că $\varphi \equiv \psi$ dacă şi numai dacă $\varphi \le \psi$ şi $\psi \le \varphi$.

Faptul că $\equiv$ este o echivalenţă pe F rezultă acum din problema **3.6.** de la **§3.**.

6.36. Să demonstrăm la început că relaţia $\le$ este corect definită iar în acest sens trebuie să demonstrăm că dacă avem φ, ψ, φ', $\psi' \in F$ a.î. $\vdash \varphi \to \varphi'$, $\vdash \varphi' \to \varphi$ şi $\vdash \psi \to \psi'$, $\vdash \psi' \to \psi$ atunci $\vdash \varphi \to \psi$ dacă şi numai dacă $\vdash \varphi' \to \psi'$.

Presupunem că $\vdash \varphi \to \psi$. Din $\vdash \varphi' \to \varphi$, $\vdash \varphi \to \psi$ şi $\vdash \psi \to \psi'$ rezultă $\vdash \varphi' \to \psi'$ prin aplicarea regulei de deducţie (R_1).

Analog reciproc.

Faptul că $\leq$ este o relaţie de ordine pe $F/\equiv$ rezultă imediat din principiul identităţii şi din (R_1). A se vedea şi problema **3.5.** de la **§3.**.

Pentru a demonstra că $(F/\equiv, \leq)$ devine latice Boole, să demonstrăm la început că $(F/\equiv, \leq)$ este latice distributivă cu **0** şi **1**. Mai precis, să demonstrăm că pentru oricare φ, $\psi \in F$, $\hat{\varphi} \wedge \hat{\psi} = \widehat{\varphi \wedge \psi}$ iar $\hat{\varphi} \vee \hat{\psi} = \widehat{\varphi \vee \psi}$.

Din problemele **6.19.** şi **6.20.** deducem că $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \geq \widehat{\varphi \wedge \psi}$. Dacă mai avem $\chi \in F$ a.î. $\hat{\chi} \leq \hat{\varphi}$ şi $\hat{\chi} \leq \hat{\psi}$, adică $\vdash \chi \to \varphi$ şi $\vdash \chi \to \psi$, atunci din (R_4) deducem că $\vdash \chi \to (\varphi \wedge \psi)$, de unde egalitatea $\hat{\varphi} \wedge \hat{\psi} = \widehat{\varphi \wedge \psi}$.

Din problemele **6.16.** şi **6.17.** deducem că $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \leq \widehat{\varphi \vee \psi}$. Dacă mai avem $\chi \in F$ a.î. $\hat{\chi} \geq \hat{\varphi}$ şi $\hat{\chi} \geq \hat{\psi}$, adică $\vdash \varphi \to \chi$ şi $\vdash \psi \to \chi$, atunci din (R_3) deducem că $\vdash \varphi \vee \psi \to \chi$, de unde egalitatea $\hat{\varphi} \vee \hat{\psi} = \widehat{\varphi \vee \psi}$.

Distributivitatea laticii $(F/\equiv, \wedge, \vee)$ rezultă din problemele **6.24.** şi **6.29.**. Dacă pentru un $\varphi \in F$ notăm $\mathbf{0} = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}$ şi $\mathbf{1} = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}$, atunci din problema **6.30.** deducem că pentru orice $\psi \in F$, $\mathbf{0} \leq \hat{\psi} \leq \mathbf{1}$.

Cum $\mathbf{0} = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi} = \hat{\varphi} \wedge \widehat{\neg\varphi}$ iar $\mathbf{1} = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi} = \hat{\varphi} \vee \widehat{\neg\varphi}$, deducem că $\neg\hat{\varphi} = \widehat{\neg\varphi}$, adică laticea $(F/\equiv, \leq)$ este latice Boole.

6.37. (i). Trebuie să demonstrăm că $\vdash \varphi$ dacă şi numai dacă $\hat{\varphi} = \mathbf{1}$, adică $\vdash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \rceil\varphi$.

Să presupunem că $\vdash \varphi$. Cum $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \rceil\varphi \to \varphi)$ (conform cu A_1), rezultă $\vdash \varphi \vee \rceil\varphi \to \varphi$. Cum $\vdash \varphi \to \varphi \vee \rceil\varphi$, deducem că :

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \rceil\varphi.$$

Reciproc, presupunem că $\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi \vee \rceil\varphi$. Dar $\vdash \varphi \vee \rceil\varphi$ (principiul terțului exclus), deci prin m.p. deducem că $\vdash \varphi$.

(ii)-(iv). Rezultă imediat din problema **6.36.**.

(v). Revine la a proba că $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\rceil\varphi \to \psi)$.

(vi). Rezultă din (ii) şi (v).

6.38. Notând $x = \hat{\alpha}$, $y = \hat{\beta}$, $z = \hat{\gamma}$ şi $t = \hat{\delta}$ conform cu punctul (i) de la problema **6.37.** este suficient să stabilim identitatea booleană:

$$[x \to (y \to t)] \to [(x \to (z \to t)) \to (x \to (y \to t))] = \mathbf{1},$$

ceea ce este echivalent cu

$$x \to (y \to t) \leq (x \to (z \to t)) \to (x \to (y \to t)).$$

Însă cum într-o algebră Boole avem $x \to y = \rceil x \vee y$, avem:

$$(x \to (z \to t)) \to (x \to (y \to t)) = \rceil(\rceil x \vee \rceil z \vee t) \vee (\rceil x \vee \rceil y \vee t)$$
$$= (x \wedge z \wedge \rceil t) \vee (\rceil x \vee \rceil y \vee t) = (\rceil x \vee \rceil y) \vee [t \vee (x \wedge z \wedge \rceil t)]$$
$$= (\rceil x \vee \rceil y) \vee [(t \vee (x \wedge z)) \wedge (t \vee \rceil t)] = (\rceil x \vee \rceil y) \vee [t \vee (x \wedge z)]$$
$$= (\rceil x \vee \rceil y \vee t) \vee (x \wedge z) \geq \rceil x \vee \rceil y \vee t = x \to (y \to t).$$

6.39. Definirea lui $\widetilde{f}$ se face prin inducție (ținând cont de modul de formare al formulelor din F pornind de la variabilele propoziționale şi conectorii logici $\rceil$ şi $\to$), urmărind clauzele (i)-(iii).

Demonstrarea unicității lui $\widetilde{f}$ se face tot prin inducție.

Să presupunem deci că mai avem g : $F \rightarrow L_2$ ce satisface condițiile (i)-(iii) şi să demonstrăm că pentru orice $\alpha \in F$, $\widetilde{f}(\alpha) = g(\alpha)$.

Pentru α distingem trei cazuri:

(1) $\alpha \in V$ şi atunci $g(\alpha) = \widetilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$.

(2) $\alpha = \rceil\varphi$ şi atunci $g(\alpha) = \rceil g(\varphi) = \rceil \widetilde{f}(\varphi) = \widetilde{f}(\rceil\varphi) = \widetilde{f}(\alpha)$ (căci $g(\varphi) = \widetilde{f}(\varphi)$ prin ipoteza de inducție).

(3) $\alpha = \varphi \rightarrow \psi$ şi atunci $g(\alpha) = g(\varphi) \rightarrow g(\psi) = \widetilde{f}(\varphi) \rightarrow \widetilde{f}(\psi) = \widetilde{f}(\alpha)$ (căci prin ipoteza de inducție $g(\varphi) = \widetilde{f}(\varphi)$ şi $g(\psi) = \widetilde{f}(\psi)$).

6.40. Rezultă imediat din problema **6.39.** şi din felul în care se definesc conectorii logici $\vee$, $\wedge$ şi $\leftrightarrow$ cu ajutorul conectorilor $\rceil$ şi $\rightarrow$.

6.41. $\bar{f}$ se defineşte prin $\bar{f}(\hat{\varphi}) = \widetilde{f}(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in F$ şi se verifică acum imediat că $\bar{f}$ este corect definită; evident $\bar{f} \circ p = \widetilde{f}$.

6.42. Vom arăta că dacă $\varphi \in Prov$, (adică $\vdash \varphi$) atunci $\widetilde{f}(\varphi) = 1$ pentru orice interpretare $f : V \rightarrow L_2$. Vom proceda prin inducție asupra modului cum s-a definit $\vdash \varphi$.

Considerăm întâi cazul axiomelor:

(A_1) φ este de forma: $\varphi = \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. Atunci:

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\varphi) &= \widetilde{f}(\alpha) \rightarrow (\widetilde{f}(\beta) \rightarrow \widetilde{f}(\alpha)) \\ &= \rceil \widetilde{f}(\alpha) \vee \rceil \widetilde{f}(\beta) \vee \widetilde{f}(\alpha) \\ &= (\rceil \widetilde{f}(\alpha) \vee \widetilde{f}(\alpha)) \vee \rceil \widetilde{f}(\beta) = 1 \vee \rceil \widetilde{f}(\beta) = 1.\end{aligned}$$

(A_2) φ este de forma: $\varphi = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$.

Dacă notăm $x = \widetilde{f}(\alpha)$, $y = \widetilde{f}(\beta)$, $z = \widetilde{f}(\gamma)$, atunci:

$\tilde{f}$ (φ) = (x→(y→z))→((x→y)→(x→z))

$= (\rceil x \vee \rceil y \vee z) \rightarrow (\rceil (x \rightarrow y) \vee (\rceil x \vee z))$

$= \rceil(\rceil x \vee \rceil y \vee z) \vee \rceil(\rceil x \vee y) \vee (\rceil x \vee z)$

$= (x \wedge y \wedge \rceil z) \vee (x \wedge \rceil y) \vee \rceil x \vee z$

$= (x \wedge y \wedge \rceil z) \vee (\rceil y \vee \rceil x) \vee z$

$= (x \wedge y \wedge \rceil z) \vee \rceil(x \wedge y \wedge \rceil z) = 1.$

(A_3) φ este de forma: $\varphi = (\rceil\alpha \rightarrow \rceil\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$.

Avem $\tilde{f}(\varphi) = (\rceil x \rightarrow \rceil y) \rightarrow (y \rightarrow x) = \rceil(x \vee \rceil y) \vee (\rceil y \vee x) = 1$.

Presupunem acum că ⊢ φ a fost obținut prin m.p. din ⊢ ψ, ⊢ ψ→φ. Ipoteza inducției conduce la $\tilde{f}(\psi) = 1$ şi $\tilde{f}(\psi \rightarrow \varphi) = 1$.

Atunci $1 = \tilde{f}(\psi) \rightarrow \tilde{f}(\varphi) = 1 \rightarrow \tilde{f}(\varphi) = \tilde{f}(\varphi)$, deci $\tilde{f}(\varphi) = 1$ şi soluția se încheie.

6.43. Facem inducție matematică după numărul de conectori logici al lui φ. Din felul de definire al lui g_f deducem că afirmația din enunț este adevărată pentru variabilele propoziționale. Să presupunem că $\tilde{g}_f(\varphi) = f(\hat{\varphi})$ şi $\tilde{g}_f(\psi) = f(\hat{\psi})$. Cum f este morfism de algebre Boole avem

$$\tilde{g}_f(\rceil\varphi) = \rceil\,\tilde{g}_f(\varphi) = \rceil f(\hat{\varphi}) = f(\rceil\,\hat{\varphi}) = f(\widehat{\neg\varphi})$$

iar $\tilde{g}_f(\varphi \rightarrow \psi) = \tilde{g}_f(\varphi) \rightarrow \tilde{g}_f(\psi)$ (vezi problema **6.39.**)

$$= f(\hat{\varphi}) \rightarrow f(\hat{\psi}) = f(\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\psi}) = f(\widehat{\varphi \rightarrow \psi}).$$

6.44. Vom proba incluziunea complementarelor iar pentru aceasta fie φ∈F a.î. φ nu este demonstrabilă (deci φ∉*Prov*).

Atunci ținând cont de cele stabilite în problema **6.36.**, în algebra Boole B = F/≡, $\hat{\varphi} \neq \mathbf{1}$, deci $\widehat{\neg\varphi} \neq \mathbf{0}$. Conform problemei **5.14.** în algebra Boole B = F/≡ există un ultrafiltru U a.î. $\widehat{\neg\varphi} \in U$.

Fie p : B → B/U ≈ L_2 (conform problemei **5.30.**) morfismul surjectiv canonic de algebre Boole și $\widetilde{f}_p$: F → L_2 interpretarea lui F indusă de p (conform problemei **6.43.**) Deoarece $\widehat{\neg\varphi} \in U$, $\widetilde{f}_p(\rceil\varphi) = p(\rceil\varphi) = \mathbf{1}$ și deci $\widetilde{f}_p(\varphi) = \mathbf{0}$, adică $\varphi \notin$ *Taut*.

Deducem deci că *Taut* ⊆ *Prov*.

§7. Calculul cu predicate

7.1. Considerăm următoarea schemă de demonstrație:

$\vdash \forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \forall y\, \varphi(x,y)$ (B_2)

$\vdash \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \varphi(y)$ (B_2)

$\vdash \forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \varphi(y)$ (R_1 de la calc. prop.)

$\vdash \forall x\, (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \varphi(y))$ (G)

$\vdash \forall x\, (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \forall x\, \varphi(x,y))$ (B_1)

$\vdash \forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \forall x\, \varphi(x,y)$ (m.p.)

$\vdash \forall y\, (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \forall x\, \varphi(x,y))$ (G)

$\vdash \forall y\, (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \forall x\, \varphi(x,y)) \rightarrow (\forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow$
$\rightarrow \forall y \forall x\, \varphi(x,y))$ (B_1)

$\vdash \forall x \forall y\, \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \forall x\, \varphi(x,y)$ (m.p.).

7.2. Considerăm următoarea schemă de demonstrație:

$\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)$ (probl.**6.19.**)

$\vdash \forall x\, \varphi(x) \rightarrow \varphi(x)$ (B_2)

$\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \varphi(x)$ (R_1 de la calc.prop.)

$\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ (probl.**6.20.**)

$\vdash \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ (B_2)

$\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$ (R_1 de la calc.prop.)

$\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \psi(x)$ (calc.prop.)

$\vdash \forall x\, [\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \psi(x)]$ (G)

$\vdash \forall x\, [\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \psi(x)] \rightarrow$
$\rightarrow [\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \forall x\, \psi(x)]$ (B_1)

$\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \forall x\, \psi(x)$ (m.p.)

$\vdash [\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow \forall x\, \psi(x)] \rightarrow$ (R_1 de la
$\rightarrow [\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x\, \varphi(x) \rightarrow \forall x\, \psi(x))]$ calc.prop.)

$\vdash \ \forall x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\ \varphi(x) \to \forall x\ \psi(x))$ (m.p.).

7.3. Considerăm următoarea schemă de demonstrație:

$\vdash \varphi \to \rceil\rceil\varphi$ (probl.**6.13.**)
$\vdash \forall x\ (\varphi \to \rceil\rceil\varphi)$ (G)
$\vdash \forall x\ (\varphi \to \rceil\rceil\varphi) \to (\forall x\ \varphi \to \forall x\ \rceil\rceil\varphi)$ (probl.**7.2.**)
$\vdash \ \forall x\ \varphi \to \forall x\ \rceil\rceil\varphi$ (m.p.)
$\vdash \ \forall x\ \rceil\rceil\varphi \to \forall x\ \varphi$ (analog)
$\vdash \ \forall x\ \varphi \leftrightarrow \forall x\ \rceil\rceil\varphi$ (din ultimele două)
$\vdash \ \forall x\ \rceil\rceil\varphi \leftrightarrow \rceil\rceil\forall x\ \rceil\rceil\varphi$ (calc.prop.)
$\vdash \ \forall x\ \varphi \leftrightarrow \rceil\rceil\forall x\ \rceil\rceil\varphi$ (din ultimele două).

7.4. Considerăm următoarea schemă de demonstrație:

$\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi)$ (calc. prop.)
$\vdash \forall x\ [(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi)]$ (G)
$\vdash \forall x\ [(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi)] \to [\forall x\ \ (\varphi \leftrightarrow \psi) \to$
$\to \forall x(\varphi \to \psi)]$ (probl. **7.2.**)
$\vdash \forall x\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \to \forall x\ (\varphi \to \psi)$ (m.p.)
$\vdash \forall x\ (\varphi \to \psi) \to (\forall x\ \varphi \to \forall x\ \psi)$ (probl. **7.2.**)
$\vdash \forall x\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\ \varphi \to \forall x\ \psi)$ (m.p.)
$\vdash \forall x\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\ \psi \to \forall x\ \varphi)$ (analog)
$\vdash \forall x\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \to [(\forall x\ \varphi \to \forall x\ \psi) \wedge (\forall x\ \psi \to \forall x\ \varphi)]$
(din ultime două).

Această ultimă relație este tocmai relația cerută.

7.5. Considerăm următoarea schemă de demonstrație:

$\vdash [(\varphi \to \forall x\ \psi) \to (\varphi \to \forall x\ \psi)] \to$

$\rightarrow [(\varphi \rightarrow \forall x\ \psi) \wedge \varphi \rightarrow \forall x\ \psi\ ]$ (probl.**6.26.**)

$\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\ \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\ \psi)$ (principiul identității)

$\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\ \psi) \wedge \varphi \rightarrow \forall x\ \psi$ (m.p.)

$\vdash \forall x\ \psi \rightarrow \psi$ (B_2)

$\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\ \psi) \wedge \varphi \rightarrow \psi$ (R_1 de la calc. prop.)

$\vdash [(\varphi \rightarrow \forall x\ \psi) \wedge \varphi \rightarrow \psi] \rightarrow$
$\rightarrow [(\varphi \rightarrow \forall x \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)]$ (probl.**6.27.**)

$\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\ \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (m.p.)

$\vdash \forall x\ [(\varphi \rightarrow \forall x\ \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)]$ (G)

$\vdash \forall x\ [(\varphi \rightarrow \forall x\ \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow$
$\rightarrow [(\varphi \rightarrow \forall x\ \psi) \rightarrow \forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)]$ (B_1)

$\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\ \psi) \rightarrow \forall x\ (\varphi \rightarrow \psi)$ (m.p.).

7.6. Considerăm următoarea schemă de demonstrație:

(1) $\vdash (\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi(x))$ (probl.**6.12.**)

(2) $\vdash \forall x\ [(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi(x))]$ (G)

(3) $\vdash \forall x\ [(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi(x))] \rightarrow$
$\rightarrow [\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow \forall x(\neg \psi \rightarrow \neg \varphi(x))]$ (probl.**7.2.**)

(4) $\vdash \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow \forall x\ (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi(x))$ (m.p.)

(5) $\vdash \forall x\ (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi(x)) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \forall x\ \neg \varphi(x))$ (B_1)

(6) $\vdash \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \forall x\ \neg \varphi(x)$($R_1$ de la calc.prop.)

(7) $\vdash (\neg \psi \rightarrow \forall x\ \neg \varphi(x)) \rightarrow (\neg \forall x\ \neg \varphi(x) \rightarrow \neg\neg \psi)$ (probl.**6.12.**)

(8) $\vdash \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \forall x\ \neg \varphi(x) \rightarrow \neg\neg \psi)$($R_1$ de la calc. prop.)

(9) $\vdash [\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\ \varphi(x)) \rightarrow \neg\neg \psi)] \rightarrow$
$\rightarrow [\forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi) \wedge \exists x\ \varphi(x) \rightarrow \neg\neg \psi]$ (probl.**6.26.**)

(10) $\vdash \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \psi) \wedge \exists x\ \varphi(x) \rightarrow \neg\neg \psi$ (m.p.)

(11) $\vdash \rceil\rceil \psi \to \psi$ (probl.**6.11**)

(12) $\vdash \forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \wedge \exists x\, \varphi(x) \to \psi$ (R_1 de la calc.prop.)

(13) $\vdash [\forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \wedge \exists x\, \varphi(x) \to \psi] \to$
$\to [\forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x\, \varphi(x) \to \psi)]$ (probl. **6.27.**)

(14) $\vdash \forall x\, (\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x\, \varphi(x) \to \psi)$ (m.p.)

(15) $\vdash (\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \to (\rceil \psi \to \forall x \rceil \varphi(x))$ (probl. **6.12.** şi definiția lui $\exists x\, \varphi(x)$)

(16) $\vdash [(\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \to (\rceil \psi \to \forall x \rceil \varphi(x))] \to$
$\to [(\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \wedge \rceil \psi \to \forall x \rceil \varphi(x)]$ (probl. **6.26.**)

(17) $\vdash (\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \wedge \rceil \psi \to \forall x \rceil \varphi(x)$ (m.p.)

(18) $\vdash \forall x \rceil \varphi(x) \to \rceil \varphi(x)$ (B_2)

(19) $\vdash (\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \wedge \rceil \psi \to \rceil \varphi(x)$ (R_1 de la calc.prop.)

(20) $\vdash [(\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \wedge \rceil \psi \to \rceil \varphi(x)] \to$
$\to [(\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \to (\rceil \psi \to \rceil \varphi(x))]$ (probl.**6.27.**)

(21) $\vdash [(\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \to (\rceil \psi \to \rceil \varphi(x))]$ (m.p.)

(22) $\vdash (\rceil \psi \to \rceil \varphi(x)) \to (\varphi(x) \to \psi)$ (A_3)

(23) $\vdash (\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \to (\varphi(x) \to \psi)$ (R_1 de la calc.prop.)

(24) $\vdash \forall x\, [(\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \to (\varphi(x) \to \psi)]$ (G)

(25) $\vdash \forall x\, [(\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \to (\varphi(x) \to \psi)] \to$
$\to [(\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \to \forall x\, (\varphi(x) \to \psi)]$ (B_1)

(26) $\vdash (\exists x\, \varphi(x) \to \psi) \to \forall x\, (\varphi(x) \to \psi)$ (m.p.).

Din (12) şi (22) rezultă relația cerută.

7.7. Considerăm următoarea schemă de demonstrație:

(1) $\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x) \to \forall x\, \varphi(x)$ (probl.**6.19.**)

(2) $\vdash \forall x\, \varphi(x) \to \varphi(x)$ (B_2)

(3) $\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x) \to \varphi(x)$ (R$_1$ de la calc.prop.)

(4) $\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x) \to \psi(x)$ (analog)

(5) $\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x) \to \varphi(x) \wedge \psi(x)$ (R$_4$ de la calc.prop)

(6) $\vdash \forall x\, [\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x) \to \varphi(x) \wedge \psi(x)]$ (G)

(7) $\vdash \forall x\, [\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x) \to \varphi(x) \wedge \psi(x)] \to$
$\to [\forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x) \to \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))]$ (B$_1$)

(8) $\vdash \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x) \to \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x))$ (m.p.)

(9) $\vdash \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to (\varphi(x) \wedge \psi(x))$ (B$_2$)

(10) $\vdash \varphi(x) \wedge \psi(x) \to \varphi(x)$

(11) $\vdash \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \varphi(x)$ (R$_1$ de la calc.prop.)

(12) $\vdash \forall x\, [\forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \varphi(x)]$ (G)

(13) $\vdash \forall x\, [\forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \varphi(x)] \to$
$\to [\forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \forall x\, \varphi(x)]$ (B$_1$)

(14) $\vdash \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \forall x\, \varphi(x)$ (m.p.)

(15) $\vdash \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \forall x\, \psi(x)$ (analog)

(16) $\vdash \forall x\, (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to \forall x\, \varphi(x) \wedge \forall x\, \psi(x)$ (R$_4$ de la calc.prop.)

Din (8) şi (16) rezultă relația din relația cerută aplicând R$_1$ de la calculul propozițiilor.

7.8. (i). Considerăm următoarea schemă de demonstrație:

$\vdash x = y \to (x = z \to y = z)$ (B$_5$)

$\vdash [x = y \to (x = z \to y = z)] \to$
$\to [x = z \to (x = y \to y = z)]$ (probl.**6.8.**)

$\vdash x = z \to (x = y \to y = z)$ (m.p.)

$\vdash x = x \to (x = y \to y = x)$ (luând mai sus z = x)

$\vdash x = x$ (B_3)

$\vdash x = y \to y = x$ (m.p.)

(ii).

$\vdash x = y \to y = x$ ((i).)

$\vdash y = x \to (y = z \to x = z)$ (B_5)

$\vdash x = y \to (y = z \to x = z)$ (R_1 de la calc.prop.)

$\vdash (x = y) \wedge (y = z) \to x = z$ (probl.**6.26.** şi m.p. cu rel. anterioară)

(iii).

$\vdash x = y \to y = x$ ((i).)

$\vdash y = x \to (\varphi(y) \to \varphi(x))$ (B_5)

$\vdash x = y \to (\varphi(y) \to \varphi(x))$ (R_1 de la calc.prop.)

$\vdash x = y \to (\varphi(x) \to \varphi(y))$ (B_5)

$\vdash x = y \to [(\varphi(x) \to \varphi(y)) \wedge (\varphi(y) \to \varphi(x))]$ (probl.**6.21.** şi m.p. de două ori cu rel. anterioare).

7.9. "$\Leftarrow$". Imediat.

"$\Rightarrow$". Prin inducție asupra conceptului $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Totul decurge ca în cazul calculului propozițional, (vezi problema **6.6.**), adăugându-se cazul când $\psi = \forall x\ \alpha$, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$.

$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \alpha$ (ipoteza inducției)

$\Rightarrow \Sigma \vdash \forall x\ (\varphi \to \alpha)$ (G)

$\Rightarrow \Sigma \vdash \forall x\ (\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \forall x\ \alpha)$ (B_1), φ fiind enunț

$\Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \forall x\ \alpha$ (m.p.).

Deci $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

7.10. Analog ca în cazul calculului propozițional (vezi problema **6.35.**).

7.11. Analog ca în cazul calculului propozițional (vezi problema **6.36.**).

7.12. Demonstrăm prima formulă:

(a) $\widehat{\forall x\ \varphi(x)} \le \widehat{\varphi(v)}$ pentru orice $v \in V_\tau$;

(b) dacă $\hat{\psi} \le \widehat{\varphi(v)}$ pentru orice $v \in V_\tau$, atunci $\hat{\psi} \le \widehat{\forall x\ \varphi(x)}$.

Prima relație rezultă din: $\vdash \forall x\ \varphi(x) \to \varphi(v)$, $v \in V_\tau$ (B_2)

Pentru a doua relație, presupunem că $\hat{\psi} \le \widehat{\varphi(v)}$ pentru orice $v \in V_\tau$, deci $\vdash \psi \to \varphi(v)$, $v \in V_\tau$.

Alegem o variabilă v ce nu apare în ψ sau $\forall x\ \varphi(x)$. Atunci:

$\vdash \psi \to \varphi(v)$

$\vdash \forall v\ (\psi \to \varphi(v))$ (G)

$\vdash \forall v\ (\psi \to \varphi(v)) \to (\psi \to \forall v\ \varphi(v))$ (B_1)

(1) $\vdash \psi \to \forall v\ \varphi(v)$ (m.p.).

De asemenea:

$\vdash \forall v\ \varphi(v) \to \varphi(x)$ (B_2)

$\vdash \forall x\ (\forall v\ \varphi(v) \to \varphi(x))$ (G)

$\vdash \forall x\ (\forall v\ \varphi(v) \to \varphi(x)) \to (\forall v\ \varphi(v) \to \forall x\ \varphi(x))$ (B_1)

(2) $\vdash \forall v\ \varphi(v) \to \forall x\ \varphi(x)$ (m.p.).

Din (1) şi (2), cu R_1 de la calculul propozițiilor, rezultă că $\vdash \psi \to \forall x\ \varphi(x)$, adică (b).

Relația a doua a problemei se obține din prima cu egalitățile lui De Morgan.

Observație. Prin trecerea la algebra Lindenbaum - Tarski putem stabili algebric unele proprietăți sintactice.

De exemplu, demonstrarea relației din problema **7.2.** revine la inegalitatea algebrică:

$$\bigwedge_{v\in V} (\widehat{\varphi(v)} \to \widehat{\psi(v)}) \le (\bigwedge_{u\in V} \widehat{\varphi(u)}) \to (\bigwedge_{v\in V} \widehat{\psi(v)}).$$

Calculăm termenul din dreapta:

$$\alpha = (\bigvee_{u\in V} \neg\widehat{\varphi(u)}) \vee (\bigwedge_{v\in V} \widehat{\psi(v)}) =$$

$$= \bigwedge_{v\in V} [(\bigvee_{u\in V} \neg\widehat{\varphi(u)})\vee \widehat{\psi(v)}] = \bigwedge_{v\in V} \bigvee_{u\in V} [\neg\widehat{\varphi(u)} \vee \widehat{\psi(v)}]=$$

$$= \bigwedge_{v\in V} \bigvee_{u\in V} [\widehat{\varphi(u)} \to \widehat{\psi(v)}].$$

Acum inegalitatea este evidentă.

7.13. Prin inducție după modul de definire al lui t:

- dacă t este o variabilă sau o constantă, atunci este imediat
- dacă $t = f(t_1,\ldots,t_n)$ atunci

$FV(t) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$, $s_{1|FV(t)} = s_{2|FV(t)} \Rightarrow s_{1|FV(t_i)} = s_{2|FV(t_i)}$, $i=1,..,n$

$\Rightarrow t_i^{\overline{A}}(s_1) = t_i^{\overline{A}}(s_2)$, $i = 1,..,n$ (ipoteza inducției) $\Rightarrow$

$\Rightarrow t^{\overline{A}}(s_1) = f^{\overline{A}}(t_1^{\overline{A}}(s_1),\ldots,t_n^{\overline{A}}(s_1))= f^{\overline{A}}(t_1^{\overline{A}}(s_2),\ldots,t_n^{\overline{A}}(s_2))= t^{\overline{A}}(s_2)$.

7.14. Prin inducție după φ:

- dacă φ este $t_1 = t_2$ atunci $FV(\varphi) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$.

Astfel, $s_{1|FV(\varphi)} = s_{2|FV(\varphi)} \Rightarrow s_{1|FV(t_i)} = s_{2|FV(t_i)}$, $i = 1,2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_i^{\overline{A}}(s_1) = t_i^{\overline{A}}(s_2)$, $i = 1,2$ (conform problemei **7.13.**).

Atunci: $\|\varphi(s_1)\| = 1 \Leftrightarrow t_1^{\overline{A}}(s_1) = t_2^{\overline{A}}(s_1)$

$\Leftrightarrow t_1^{\overline{A}}(s_2) = t_2^{\overline{A}}(s_2)$

$\Leftrightarrow \|\varphi(s_2)\| = 1.$

Deci $\|\varphi(s_1)\| = \|\varphi(s_2)\|$.

- dacă φ este $R(t_1,\ldots,t_n)$, atunci $FV(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$.

Astfel, $s_{1|FV(\varphi)} = s_{2|FV(\varphi)} \Rightarrow s_{1|FV(t_i)} = s_{2|FV(t_i)}$, $i=1,..,n \Rightarrow$ $\Rightarrow t_i^{\overline{A}}(s_1) = t_i^{\overline{A}}(s_2)$, $i = 1,..,n$.

Rezultă că:

$\|\varphi(s_1)\| = 1 \Leftrightarrow (t_1^{\overline{A}}(s_1),\ldots,t_n^{\overline{A}}(s_1)) \in R^{\overline{A}}$

$\Leftrightarrow (t_1^{\overline{A}}(s_2),\ldots,t_n^{\overline{A}}(s_2)) \in R^{\overline{A}}$

$\Leftrightarrow \|\varphi(s_2)\| = 1.$

- dacă $\varphi = \alpha \to \beta$, atunci $FV(\varphi) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$.

Astfel, $s_{1|FV(\varphi)} = s_{2|FV(\varphi)} \Rightarrow s_{1|FV(\alpha)} = s_{2|FV(\alpha)}$, $s_{1|FV(\beta)} = s_{2|FV(\beta)}$ $\Rightarrow \|\alpha(s_1)\| = \|\alpha(s_2)\|$, $\|\beta(s_1)\| = \|\beta(s_2)\|$ (ipoteza inducției) $\Rightarrow \|\varphi(s_1)\| = \|\varphi(s_2)\|$.

- dacă $\varphi = \rceil\psi$: analog.

- Dacă $\varphi = \forall x\ \psi$, atunci $FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{\psi\}$. Fie $a \in A$. Dacă $s_{1|FV(\varphi)} = s_{2|FV(\varphi)}$, atunci $s_1\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix}_{|FV(\psi)} = s_2\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix}_{|FV(\psi)}$.

Conform ipotezei de inducție, $\|\psi(s_1\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix})\| = \|\psi(s_2\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix})\|$, deci $\|\varphi(s_1)\| = \bigwedge_{a\in A} \|\psi(s_1\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix})\| = \bigwedge_{a\in A} \|\psi(s_2\begin{bmatrix} x \\ a \end{bmatrix})\| = \|\varphi(s_2)\|$.

7.15. Demonstrăm prin inducție după t.

- dacă t este x, atunci $t(c)^{(\overline{A},a)} = a = t^{\overline{A}}(a)$;

- dacă t este o constantă d din L_τ, atunci $t(c)^{(\overline{A},a)} = d^{\overline{A}} = t^{\overline{A}}(a)$;

- dacă t este $f(t_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,t_m(x_1,\ldots,x_n))$ atunci:

$t(c_1,..,c_n)^{(\overline{A},a_1,...,a_n)} = f^{(\overline{A},a_1,...,a_n)}(t_1^{(\overline{A},a_1,...,a_n)}(c_1,..,c_n),..,$

$t_m^{(\overline{A},a_1,...,a_n)}(c_1,\dots,c_n)) = f^{\overline{A}}(t_1^{\overline{A}}(a_1,..,a_n),\dots,t_m^{\overline{A}}(a_1,..,a_n)) = t^{\overline{A}}(a_1,..,a_n).$

7.16. Demonstrăm prin inducție după φ.

- dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este $t_1(x_1,\dots,x_n) = t_2(x_1,\dots,x_n)$, atunci

$(\overline{A},a_1,\dots,a_n)\vDash\varphi(c_1,\dots,c_n) \Leftrightarrow t_1^{(\overline{A},a_1,...,a_n)}(c_1,..,c_n) = t_2^{(\overline{A},a_1,...,a_n)}(c_1,..,c_n)$

$\Leftrightarrow$ $t_1^{\overline{A}}(a_1,..,a_n) = t_2^{\overline{A}}(a_1,..,a_n)$ (conform problemei **7.15.**)

$\Leftrightarrow$ $\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\dots,a_n]$.

- dacă $\varphi(x_1,..,x_n)$ este $R(t_1(x_1,\dots,x_n),\dots,t_m(x_1,\dots,x_n))$, atunci

$(\overline{A},a_1,\dots,a_n)\vDash \varphi(c_1,\dots,c_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t_1^{(\overline{A},a_1,...,a_n)}(c_1,..,c_n),.., t_m^{(\overline{A},a_1,...,a_n)}(c_1,\dots,c_n))\in R^{(\overline{A},a_1,...,a_n)}$

$\Leftrightarrow(t_1^{\overline{A}}(a_1,..,a_n),\dots,t_m^{\overline{A}}(a_1,..,a_n))\in R^{\overline{A}}$ (conform problemei **7.15.**)

$\Leftrightarrow$ $\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\dots,a_n]$.

- Analog se demonstrează cazurile: $\varphi = \urcorner\alpha$, $\varphi = \alpha\to\beta$

- dacă $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ este $\forall x\ \psi(x, x_1,\dots,x_n)$ atunci, conform ipotezei de inducție, pentru orice constante $c,c_1,\dots,c_n$ şi pentru orice $a,a_1,\dots,a_n\in A$ avem:

$(\overline{A},a,a_1,\dots,a_n)\vDash \varphi(c,c_1,\dots,c_n) \Leftrightarrow \overline{A} \vDash \psi[a,a_1,\dots,a_n]$.

Astfel, $(\overline{A},a_1,\dots,a_n)\vDash \varphi(c_1,\dots,c_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ pentru orice $a\in A$: $(\overline{A},a_1,\dots,a_n)\vDash \psi(x,c_1,\dots,c_n)[a]$

$\Leftrightarrow$ pentru orice $a\in A$: $(\overline{A},a_1,\dots,a_n)\vDash\psi(c,c_1,..,c_n)$(ipotezei inducției)

$\Leftrightarrow$ pentru orice $a\in A$: $\overline{A} \vDash \psi[a,a_1,\dots,a_n]$ (ipotezei inducției)

$\Leftrightarrow$ $\overline{A} \vDash \varphi[a_1,\dots,a_n]$.

7.17. "$\Leftarrow$". Evident, din $\vdash\forall x\ \varphi(x) \to \varphi(c)$ (B_2) şi m.p.

"$\Rightarrow$". Dacă $\alpha_1(c),..,\alpha_n(c)$ este o demonstrație a lui $\varphi(c)$ din T în $L_\tau(C)$, atunci $\alpha_1(x),..,\alpha_n(x)$ este o demonstrație a lui $\varphi(x)$ din T în L_τ. Aşadar, $T\vdash \varphi(x)$ în L_τ, deci $T\vdash \forall x\ \varphi(x)$.

7.18. Presupunem că T nu este consistentă în $L_\tau(C)$, deci există $\varphi(c_1,..,c_n)\in L_\tau(C)$, cu $c_1,..,c_n\in C$ a.î. $T\vdash\varphi(c_1,..,c_n)$ şi $T\vdash\rceil\,\varphi(c_1,..,c_n)$. Conform problemei **7.17.**, $T\vdash \forall x_1,..,x_n\ \varphi(x_1,..,x_n)$ şi $T\vdash \forall x_1,..,x_n \rceil\,\varphi(x_1,..,x_n)$, sau $T\vdash \varphi(x_1,..,x_n)$ şi $T\vdash \rceil\,\varphi(x_1,..,x_n)$ în L_τ ceea ce contrazice faptul că T este consistentă în L_τ.

7.19. Fie $\alpha = |L_\tau| = |L_\tau(C)| = |C|$ şi $C = \{c_\xi\}_{\xi<\alpha}$ o enumerare a lui C după ordinalii mai mici decât α a.î. $\beta < \gamma < \alpha \Rightarrow c_\beta \neq c_\gamma$.

Fie $\{\varphi_\xi\}_{\xi<\alpha}$ o enumerare a formulelor lui $L_\tau(C)$ cu cel mult o variabilă liberă. Construim prin inducție transfinită:

- un şir de teorii: $(T_\xi)_{\xi<\alpha}$ cu $T_0 = T$;
- un şir de constante din C: $(d_\xi)_{\xi<\alpha}$ cu proprietățile:

(i) T_ξ este consistentă în $L_\tau(C)$;

(ii) dacă ξ este ordinal succesor: $\xi = \zeta + 1$, atunci:

$$T_\xi = T_\zeta \cup \{ \exists x_\zeta\, \varphi_\zeta \to \varphi_\zeta(d_\zeta)\}$$

unde d_ζ este o constantă din C ce nu apare în T_ζ şi

$$x_\zeta = \begin{cases} variabil\breve{a}\ liber\breve{a}\ a\ lui\ \varphi_\zeta,\ dac\breve{a}\ exist\breve{a} \\ oarecare,\ dac\breve{a}\ nu\ exist\breve{a} \end{cases}.$$

(iii) ξ este ordinal limită nenul: $T_\xi = \bigcup\limits_{\zeta<\alpha} T_\zeta$.

- Să vedem cum se face trecerea de la T_ζ la T_ξ cu $\xi = \zeta+1$.

Cardinalul mulțimii enunțurilor din T_ζ ce nu sunt în L_τ este strict mai mic decât α, pentru că fiecare pas $\mu < \zeta \Rightarrow \mu+1 \leq \zeta$ adaugă exact o constantă.

Atunci putem lua d_ζ drept prima constantă din C ce nu apare în T_ζ.

Conform ipotezei de inducție, T_ζ este consistentă în $L_\tau(C)$. Va trebui să arătăm că:

$$T_\zeta \cup \{ \exists x_\zeta\, \varphi_\zeta \to \varphi_\zeta(d_\zeta)\}$$

este consistentă în $L_\tau(C)$. Dacă este inconsistentă, atunci:

$$T_\zeta \vdash \rceil(\exists x_\zeta\, \varphi_\zeta \to \varphi_\zeta(d_\zeta)).$$

Atunci $T_\zeta \vdash \exists x_\zeta\ \varphi_\zeta \wedge \rceil\ \varphi_\zeta(d_\zeta)$, deci $T_\zeta \vdash \exists x_\zeta\ \varphi_\zeta$ şi $T_\zeta \vdash \rceil\ \varphi_\zeta(d_\zeta)$.

Din problema **7.17.** rezultă că:

$$T_\zeta \vdash \forall\ x_\zeta \rceil \varphi_\zeta(d_\zeta) \Rightarrow T_\zeta \vdash \rceil \exists x_\zeta \rceil \varphi_\zeta(x_\zeta),$$

Ceea ce este o contradicţie, T_ζ fiind consistentă.

- Va trebui să arătăm că dacă ξ este ordinal limită şi T_ζ este consistentă pentru orice $\zeta < \xi$, atunci $T_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} T_\zeta$ este consistentă.

Dacă T_ξ este inconsistentă $\Rightarrow$ există δ a.î. $T_\xi \vdash \delta \wedge \rceil\delta$ $\Rightarrow$ există $\Delta \subseteq T_\xi$ finită a.î. $\Delta \vdash \delta \wedge \rceil\delta \Rightarrow$ există $\zeta<\xi$, $\Delta \subseteq T_\zeta$ a.î. $\Delta \vdash \delta \wedge \rceil\delta \Rightarrow T_\zeta \vdash \delta \wedge \rceil\delta$, contradicţie deoarece T_ζ este consistentă.

Astfel, construcţia prin inducţie s-a terminat.

Notăm $\overline{T} = \bigcup_{\xi<\alpha} T_\xi$. Analog, $\overline{T}$ este consistentă.

Fie $\varphi(x) \in L_\tau(C)$ cu cel mult o variabilă liberă x, deci există $\xi < \alpha$ a.î. $\varphi(x) = \varphi_\xi(x_\xi)$.

Atunci $\exists x\ \varphi(x) \rightarrow \varphi(d_\xi) = \exists x_\xi\ \varphi_\xi(x_\xi) \rightarrow \varphi_\xi(d_\xi) \in T_{\xi+1} \subseteq \overline{T}$.

Astfel, $\overline{T} \vdash \exists x\ \varphi(x) \rightarrow \varphi(d_\xi)$, deci $\overline{T}$ este teorie Henkin.

7.20. Demonstraţia rezultă direct din definiţie.

7.21. Fie $\overline{T}$ teoria consistentă din problema **7.19.**. $\overline{T}$ poate fi scufundată într-o teorie maximal consistentă Σ. Σ este teorie Henkin (problema **7.20.**).

Pe mulţimea C considerăm următoarea relaţie binară:

$$c \sim d \Leftrightarrow (c = d) \in \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vdash c = d.$$

(1) "~" este o relaţie de echivalenţă:

- *reflexivitatea*: $c \sim c$ deoarece $\vdash c = c \Rightarrow \Sigma \vdash c = c$;
- *simetria*: fie $c \sim d$ şi demonstrăm că $d \sim c$.

Din $c \sim d \Rightarrow \Sigma \vdash c = d$. Dar $\vdash c = d \to d = c$ şi atunci cu m.p. din cele două relații rezultă că $\Sigma \vdash d = c$, adică $d \sim c$.

- *tranzitivitatea*: fie $c \sim d$ şi $d \sim e$; demonstrăm că $c \sim e$.

Din $c \sim d \Rightarrow \Sigma \vdash c = d$ iar din $d \sim e \Rightarrow \Sigma \vdash d = e$. Atunci $\Sigma \vdash (c = d) \wedge (d = e)$ iar cum $\vdash (c = d) \wedge (d = e) \to (c = e)$ rezultă cu m.p. că $\Sigma \vdash c = e$, adică $c \sim e$.

Considerăm mulțimea cât $A = C/\sim$.

(2) Fie $t(c_1,..,c_n)$ un termen *închis* (fără variabile libere) în $L_\tau(C)$ cu $c_1,..,c_n \in C$. Atunci $\vdash \exists x\, (t(c_1,..,c_n) = x)$.

Fie $\varphi(x)$ formula $t(c_1,..,c_n) = x$ din $L_\tau(C)$. Atunci:

$\vdash \varphi(t) \to \exists x\, \varphi(x)$

$\vdash t(c_1,..,c_n) = t(c_1,..,c_n) \to \exists x\, (t(c_1,..,c_n) = x)$

$\vdash t(c_1,..,c_n) = t(c_1,..,c_n)$

$\vdash \exists x\, (t(c_1,..,c_n) = x)$ (m.p. între ultimele două relații).

(3) Fie $t(c_1,..,c_n)$ un termen *închis* în $L_\tau(C)$. Atunci există $d \in C$ a.î. $(t(c_1,..,c_n) = d) \in \Sigma$.

Avem: $\vdash \exists x\, (t(c_1,..,c_n)= x)$ din (2).

Σ este o teorie Henkin, deci există $d \in C$ a.î.

$$\Sigma \vdash \exists x\, (t(c_1,..,c_n) = x) \to (t(c_1,..,c_n) = d).$$

Atunci, cu m.p. între cele două relații obținem:

$$\Sigma \vdash t(c_1,..,c_n) = d.$$

Fie F un simbol de operație al lui L_τ. Definim F^A ca operație pe A:

$F^A(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n) = \tilde{d} \Leftrightarrow (F(c_1,..,c_n) = d)$.

Date $c_1,..,c_n \in C$, un asemenea $d \in C$ există conform (3).

Arătăm că F^A este bine definită:

Dacă $c_i \sim d_i$, $i = 1,..,n$ şi $c \sim d$, demonstrăm că:

$$[(F(c_1,..,c_n) = c) \in \Sigma \Leftrightarrow (F(d_1,..,d_n) = d) \in \Sigma].$$

Avem: $\Sigma \vdash F(c_1,..,c_n) = c$

$\Sigma \vdash c_i = d_i$, $i=1,..,n$

$\Sigma \vdash c = d$

Atunci $\Sigma \vdash (F(c_1,..,c_n) = c) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (c_i = d_i) \wedge (c = d)$.

Dar $\Sigma \vdash (F(c_1,..,c_n) = c) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (c_i = d_i) \wedge (c = d) \rightarrow$

$\rightarrow (F(d_1,..,d_n) = d)$,

deci prin m.p. obținem $\Sigma \vdash (F(d_1,..,d_n) = d)$.

Am demonstrat astfel că F^A este bine definită.

Fie R un simbol de relație n - ară. Definim relația n - ară R^A pe A:

$$(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n) \in R^A \Leftrightarrow R(c_1,..,c_n) \in \Sigma.$$

Arătăm că R^A este bine definită.

Fie $c_i \sim d_i$, $i = 1,..,n$ şi demonstrăm că:

$$[R(c_1,..,c_n) \in \Sigma \Leftrightarrow R(d_1,..,d_n) \in \Sigma].$$

Avem: $\Sigma \vdash R(c_1,..,c_n)$ şi $\Sigma \vdash c_i = d_i$, $i = 1,..,n$. Atunci:

$$\Sigma \vdash R(c_1,..,c_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (c_i = d_i).$$

Dar $\Sigma \vdash R(c_1,..,c_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (c_i = d_i) \rightarrow R(d_1,..,d_n)$, deci, prin m.p. între cele două relații obținem:

$\Sigma \vdash R(d_1,..,d_n)$, adică R^A este bine definită.

Fie d o constantă a lui L_τ. Conf. (3) există $c \in C$ cu $(d = c) \in \Sigma$. Definim:

$$d^A = \tilde{c} \Leftrightarrow (d = c) \in \Sigma.$$

Arătăm că d^A este bine definită.

Fie $c_1, c_2 \in C$ cu $(d = c_1) \in \Sigma$ şi $(d = c_2) \in \Sigma$. Atunci:

$$\Sigma \vdash (d = c_1) \wedge (d = c_2)$$

Dar $\vdash (d = c_1) \wedge (d = c_2) \rightarrow (c_1 = c_2)$, astfel că rezultă cu m.p. că $\Sigma \vdash c_1 = c_2$, adică $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$.

Dacă $c \in C$, atunci punem $c^A = \tilde{c}$.

În acest fel pe mulțimea A am stabilit o structură $\overline{A}$ pentru $L_\tau(C)$.

(4) Fie $t(x_1,..,x_n)$ un termen în L_τ, $c_1,..,c_n,c \in C$. Atunci:

$$t^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n) = \tilde{c} \Leftrightarrow (t(c_1,..,c_n) = c) \in \Sigma.$$

Demonstrația lui (4) se face prin inducție după modul de formare al termenului t.

Arătăm numai pasul inducției:

Fie $t = f(t_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,t_m(x_1,\ldots,x_n))$ şi considerăm că ipoteza inducției funcționează pentru $t_1,..,t_m$.

Conform (3) există $d_1, . . ,d_m \in C$, $(t_i(c_1, . . ,c_n) = d_i) \in \Sigma$, $i=1,..,m$. Atunci $t_i^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n) = \tilde{d}_i$, $i = 1,..,m$ (ipoteza de inducție).

Astfel:

$$\begin{aligned} t^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n) = \tilde{c} &\Leftrightarrow f^{\overline{A}}(t_1^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n),\ldots,t_m^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n)) = \tilde{c} \\ &\Leftrightarrow f^{\overline{A}}(\tilde{d}_1,..,\tilde{d}_m) = \tilde{c} \\ &\Leftrightarrow (f(d_1,..,d_m) = c) \in \Sigma \text{ (conform definiției lui } f^{\overline{A}}\text{)} \\ &\Leftrightarrow (f(t_1(c_1,\ldots,c_n),\ldots,t_m(c_1,\ldots,c_n)) = c) \in \Sigma \qquad (\alpha) \\ &\Leftrightarrow (t(c_1,..,c_n) = c) \in \Sigma. \end{aligned}$$

Arătăm relația (α):

$\Sigma \vdash t_i(c_1,..,c_n) = d_i$, $i = 1,..,m$ implică

$\Sigma \vdash f(t_1(c_1,\ldots,c_n),..,t_m(c_1,\ldots,c_n)) = c \Leftrightarrow \Sigma \vdash f(d_1,..,d_m) = c$.

(5) Pentru orice formulă $\varphi(x_1,..,x_n)$ în L_τ şi pentru orice $c_1,..,c_n \in C$ avem:

$$\overline{A} \vDash \varphi[\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n] \Leftrightarrow \varphi(c_1,..,c_n) \in \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi(c_1,..,c_n).$$

Demonstrația se face prin inducție după modul de formare al formulei φ:

- φ este de forma $t_1 = t_2$, cu $t_i = t_i(x_1,..,x_n)$, $i=1,2$;

Conform (3), există $d_i \in C$ cu $\Sigma \vdash t_i(c_1,..,c_n) = d_i$, i=1,2.

Conform (4) $t_i^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n) = \tilde{d}_i^{\overline{A}}$, i=1,2.

$$\overline{A} \vDash \varphi[\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n] \Leftrightarrow t_1^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n) = t_2^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n)$$
$$\Leftrightarrow d_1^{\overline{A}} = d_2^{\overline{A}}$$
$$\Leftrightarrow \Sigma \vdash d_1 = d_2$$
$$\Leftrightarrow \Sigma \vdash t_1(c_1,..,c_n) = t_2(c_1,..,c_n).$$

Ultima echivalență rezultă din $\Sigma \vdash d_i = t_i(c_1,..,c_n)$, i=1,2 şi din axiomele egalității.

- φ este de forma $R(t_1,..,t_m)$ cu $t_i = t_i(x_1,..,x_n)$, i=1,..,m;

Conform (3), există $d_1,..,d_m \in C$ cu $\Sigma \vdash d_i = t_i(c_1,..,c_n)$, i=1,..,m.

Atunci $\tilde{d}_i = \tilde{d}_i^{\overline{A}} = t_i^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n)$,i=1,..,m, conform (4).

$$\overline{A} \vDash \varphi[\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n] \Leftrightarrow (t_1^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n),.., t_m^{\overline{A}}(\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n)) \in R^{\overline{A}}$$
$$\Leftrightarrow (\tilde{d}_1,..,\tilde{d}_m) \in R^{\overline{A}}$$
$$\Leftrightarrow R(d_1,..,d_m) \in \Sigma \text{ (conform definiției lui } R^{\overline{A}})$$
$$\Leftrightarrow R(t_1(c_1,..,c_n),..,t_m(c_1,..,c_n)) \in \Sigma$$
$$\Leftrightarrow \varphi(c_1,..,c_n) \in \Sigma.$$

- φ este de forma $\rceil\psi(x_1,..,x_n)$;

Conform ipotezei de inducție: $\overline{A} \vDash \psi[\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n] \Leftrightarrow \psi(c_1,..,c_n) \in \Sigma$.

$$\overline{A} \vDash \varphi[\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n] \Leftrightarrow \overline{A} \nvDash \psi[\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n]$$
$$\Leftrightarrow \psi(c_1,..,c_n) \notin \Sigma$$
$$\Leftrightarrow \rceil\psi(c_1,..,c_n) \in \Sigma \text{ (cu } \Sigma \text{ maximal consistentă)}$$
$$\Leftrightarrow \varphi(c_1,..,c_n) \in \Sigma.$$

- φ este de forma $\psi_1(x_1,..,x_n) \vee \psi_2(x_1,..,x_n)$ se face în mod analog;

- φ este de forma $\exists x\, \psi(x_1,..,x_n)$;

$\overline{A} \vDash \varphi[\tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n] \Leftrightarrow$ există $\tilde{c} \in A$ a.î. $\overline{A} \vDash \psi[\tilde{c}, \tilde{c}_1,..,\tilde{c}_n]$ (definiție)

$\Leftrightarrow$ există $c \in C$ a.î. $\psi(c,c_1,..,c_n) \in \Sigma$ (ipoteza de inducție)

$\Leftrightarrow \Sigma \vdash \rceil x\ \psi(x,c_1,..,c_n)$ (Σ= teorie Henkin)

$\Leftrightarrow \varphi(c_1,..,c_n) \in \Sigma$.

Astfel se încheie demonstrația lui (5).

Atunci pentru orice enunț φ al lui L_τ:

$$\overline{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma.$$

Cum $T \subseteq \Sigma$, rezultă $\overline{A} \vDash T$.

Este evident că: $|\overline{A}| = |C/\sim| \leq |C| = |L_\tau|$.

7.22. "$\Rightarrow$". Prin inducție după modul cum este definit conceptul $T \vdash \varphi$.

"$\Leftarrow$". $T \nvdash \varphi \Rightarrow T \cup \{\rceil\varphi\}$ consistentă

$\Rightarrow$ există $\overline{A} \vDash T \cup \{\rceil\varphi\}$ (conform problemei **7.21.**)

$\Rightarrow \overline{A} \vDash T$ şi $\overline{A} \nvDash \varphi$

$\Rightarrow T \nvDash \varphi$.

7.23. Rezultă din problemele **7.21.** şi **7.22.**

7.24. Rezultă imediat din problema **7.21.**

7.25. Din problema **7.21.** şi T consistentă $\Leftrightarrow$ orice parte finită a lui T este consistentă.

Bibliografie

1. R. Balbes, Ph. Dwinger: *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1974.

2. J. Bell, A. B. Slomson: *Models and Ultraproducts: an introduction*, North – Holland Publishing Company, 1971.

3. G. Birkhoff: *Lattice theory*, American Math. Society, 1967.

4. V. Boicesu, A. Filipoiu, G. Georgescu, S. Rudeanu: *Lukasiewicz – Moisil Algebras*, North - Holland, 1991.

5. S. Burris, H. P. Sankappanavar: *A course in universal algebra*, Springer – Verlag, 1981.

6. D. Buşneag: *Capitole speciale de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 1997.

7. D. Buşneag, D. Piciu: *Lecții de algebră*, Ed. Universitaria, Craiova, 2002.

8. B. A. Davey, H. A. Pristley: *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1990.

9. G. Georgescu: *Calculul propozițiilor şi predicatelor* - note de curs.

10. G. Grätzer: *General lattice theory*, Birkhäuser, 1978.

11. P. Halmos: *Lectures on boolean algebras*, Van Nostrand, 1963.

12. P. Kessler: *Elemente de teoria mulțimilor şi topologie generală*, Ed. Secolul XXI, 1996.

13. J.D.Monk: *Mathematical Logic,* Springer-Verlag, 1976.

14. C. Năstăsescu: *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, 1974.

15. D. Ponasse, *Logique Mathematique*, O. C. D. L., Paris, 1967.

16. S. Rudeanu: *Axiomele laticilor şi ale algebrelor booleene*, Ed. Academiei, 1963.

17. S. Rudeanu: *Elemente de teoria mulțimilor*, Reprografia Univ. din Bucureşti, 1973.

18. S.Rudeanu: *Lecții de calculul predicatelor şi calculul propozițiilor*, Ed. Univ. din Bucureşti, 1997.

19. J. R. Schonfield: *Mathematical Logic*, Addisson – Wesley Publishing Company, 1967.